Задачи для подготовки к экзамену по ВМЛиТА

1. Какие из утверждений верны для всех A, B, C?
а) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$;
б) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
в) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \nsubseteq C \setminus B$;
г) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;
д) если $A \subseteq B$ и $B \in C$, то $A \in C$;
е) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
ё) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
ж) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
з) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
и) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
й) $A \times B = B \times A$.

2. Докажите, что множество алгебраических чисел счётно.

3. Докажите, что множество бесконечных последовательностей из 0, 1 и 2 континуально.

4. Докажите, что множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счётно.

5. Докажите, что множество непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ континуально.

6. Пусть α, β, γ — линейно упорядоченные множества. Всегда ли верно, что
а) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \simeq \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;
б) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha \simeq \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$?

7. Определите, является ли каждая из следующих формул тавтологией, тождественно ложной формулой или ни тем, ни другим. Являются ли эти формулы выполнимыми?
а) $p \leftrightarrow (\neg p \vee \neg p)$;
б) $((q \to p) \to q) \to q$;
в) $(p \to q) \wedge r \to p$;
г) $\neg p \to p \wedge q$.

8. Постройте формулу A, для которой данные формулы оказываются тавтологиями. Сколько неэквивалентных решений имеет задача?
а) $(A \wedge q \to \neg p) \to ((p \to \neg q) \to A)$;
б) $(r \to A) \leftrightarrow (r \to p \wedge q)$, $\quad (A \to r) \leftrightarrow (\neg(p \vee q) \to r)$.

9. В структуре $(\mathbb{N}; |)$, где $m|n$ означает, что число m является делителем числа n, выразите отношения:
а) равенство;
б) $\{0\}$;
в) $\{1\}$;
г) множество простых чисел;
д) a и b взаимно простые;
е) a — степень простого числа b;
ё) a — квадрат простого числа b;
ж) a есть наибольший общий делитель чисел b и c;
з) a есть наименьшее общее кратное чисел b и c.

10. В структуре $(P(U), \subseteq)$ выразите отношения:
а) $a = \varnothing$;
б) $a = U$;
в) a одноэлементное;
г) a двуэлементное;
д) $a = b \cup c$;
е) $a = b \cap c$;
ё) $a = U \setminus b$.

11. Докажите невыразимость следующих предикатов в структурах:
а) $x = 1$ в $(\mathbb{Q}, =, <, +)$;
б) $x = 1/2$ в $(\mathbb{R}, =, <, 0, 1)$.

12. Докажите, что формула φ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\exists x \varphi$.

13. Всегда ли формула следующего вида является общезначимой?
а) $\forall x \varphi \to \exists y \varphi$;
б) $\exists y \forall x \varphi \to \forall x \exists y \varphi$;
в) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$;
г) $(\forall x \varphi \to \forall x \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$;
д) $(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$;
е) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi)$;

ё) $(\forall x\varphi \wedge \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$;
ж) $(\forall x\varphi \to \forall x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$;
з) $((\exists x Ax \vee \exists x Bx) \to \forall x Cx) \to \forall x((Ax \vee Bx) \to Cx)$;
и) $(\forall x Ax \to (\exists x Bx \wedge \exists x Cx)) \to \exists x(Ax \to (Bx \wedge Cx))$;
й) $\forall x\exists y\forall z Pxyz \to \forall z\exists y\forall x Pxyz$;
к) $\forall x\exists y\forall z Pxyz \to \exists y\forall z\exists x Pxyz$.

14. Приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме (P, Q — предикатные символы):
a) $\exists w(\forall x\exists y P(x,y,z) \to \neg\forall y\exists w Q(x,y,w))$;
b) $(\neg\exists x R(x,y) \to (\forall y P(y,x,w) \wedge \exists x Q(x,y,v))) \to (\exists w\forall v Rvw \vee P(x,y,x))$.

15. Покажите, что, вообще говоря, подстановки (t/x) и (s/y) не коммутируют (даже если обе корректны). Дайте рекурсивное определение одновременной подстановки $(t_1/x_1, \dots, t_n/x_n)$.

16. Приведите пример, когда формула вида $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ не является общезначимой.

17. Докажите, что если φ и ψ равновыполнимы, то не всегда равновыполнимы $\forall x\varphi$ и $\forall x\psi$.

18. Докажите, что для любого (в т.ч. бесконечного) множества формул Γ найдется некоторое множество замкнутых формул Γ' такое, что Γ и Γ' равновыполнимы.

19. Пусть теория T конечно аксиоматизируема, и пусть S — произвольное множество формул, аксиоматизирующее T. Тогда найдется конечное $S' \subseteq S$, такое что S' аксиоматизирует T. (Иначе говоря, конечную аксиоматизацию можно выделить из любой аксиоматизации.)

20. Изоморфны ли структуры:
а) $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;
б) $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;
в) $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{R}, <)$;
г) $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;
д) $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, S^1)$ и $(\mathbb{Z}, S^2)$, где $S^k(x,y) \Leftrightarrow y = x + k$;
е) $(\mathbb{N}, =, +)$ и $(\mathbb{Z}, =, +)$;
ё) $(\mathbb{Q}, =, +)$ и $(\mathbb{Z}, =, +)$?

21. Кто побеждает в игре Эренфойхта для следующих структур?
а) $(\mathbb{N}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;
б) $(\mathbb{Q}, <)$ и $(\mathbb{Z}, <)$;
в) $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <)$;
г) $(\mathbb{Z}, A, =)$ и $(\mathbb{N}, A, =)$, где $A(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$;
д) $(\mathbb{R}, <)$ и $(\mathbb{R} + \mathbb{R}, <)$;
е) $(\mathbb{N}, S^1)$ и $(\mathbb{N}, S^2)$, где $S^k(x, y) \Leftrightarrow y = x + k$;
ё) $(\mathbb{R}, M)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, M)$, где $M(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$.

22. Является ли полной теория $\{\exists x \exists y \forall z (z = x \vee z = y)\}$?

23. Покажите, что теории $Th([0, 1], =, <)$ и $Th([0, +\infty), =, <)$ конечно аксиоматизируемы, полны и разрешимы. Будут ли они категоричными в мощности континуум?

24. Рассмотрим теорию плотных линейно упорядоченных множеств (не добавляя аксиом про наименьший и наибольший элемент). Будет ли она категорична в какой-либо мощности? полна? разрешима?

25. Покажите, что если некоторая формула в сигнатуре $(=, +, \cdot)$ истинна во всех полях характеристики 0, то она истинна и во всех полях достаточно большой конечной характеристики.

26. Докажите возможность элиминации кванторов в чистой теории равенства.

27. Опишите класс шкал Крипке, в которых будут общезначимы следующие формулы:
а) $p \to \Diamond p$;
б) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$;
в) $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$;
г) $\Box\Box p \to \Box p$;
д) $\Diamond\Box p \to \Box p$.

28. В классической логике высказываний верна теорема о дедукции: $\Gamma, A \vdash B \Leftrightarrow \Gamma \vdash A \to B$. Верна ли она в модальной логике?

29. Пусть тотальная функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ невозрастающая. Докажите, что f вычислима.

30. Пусть все множества $A_i, i \in \mathbb{N}$ перечислимы. Обязательно ли перечислимо множество $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$?

31. Докажите, что перечислимое множество можно перечислить без повторений.

32. Пусть множества A и B разрешимы (перечислимы). Докажите, что тогда разрешимо (перечислимо) множество $\{xy \mid x \in A, y \in B\}$.

33. Пусть множество A разрешимо (перечислимо). Всегда ли разрешимо (перечислимо) множество $B \subseteq A$?

34. Докажите, что непустое множество $A \subseteq \mathbb{N}$ разрешимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая тотальная неубывающая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $A = \operatorname{rng} f$.

35. Докажите, что в каждом бесконечном перечислимом множестве есть бесконечное разрешимое подмножество.

36. Пусть множество $U \subseteq \mathbb{N}^2$ перечислимо. Тогда существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т. ч. $\operatorname{dom} f = \operatorname{pr}^1 U$ и $\Gamma_f \subseteq U$, где Γ_f — график функции f.

37. Докажите, что произвольные перечислимые множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$ можно разделить на перечислимые непересекающиеся части. Именно, существуют перечислимые A', B', такие что $A' \subseteq A, B' \subseteq B$,
$A' \cup B' = A \cup B$ и $A' \cap B' = \varnothing$.

38. Все сечения U_n некоторой функции U двух аргументов вычислимы. Следует ли отсюда, что функция U вычислима? (Сечение U_n — это функция одного аргумента $U_n(x) = U(n, x)$.)

39. Пусть $U : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ — универсальная вычислимая функция,
$d(x) = U(x, x)$. Чему равно $\operatorname{rng} d$?

40. Существует ли универсальное разрешимое множество $Y \subseteq \mathbb{N}^2$, т. е. такое, что Y разрешимо и для каждого разрешимого множества $A \subseteq \mathbb{N}$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, т. ч. $x \in A \Leftrightarrow (n, x) \in Y$ при всех $x \in \mathbb{N}$? Существует ли универсальное перечислимое множество (чьё определение аналогично)?