

Листок №7. Теория моделей

1. Напомним, что спектр формулы φ — это множество таких натуральных чисел n , что существует нормальная модель формулы φ мощности n . Найдите формулу, спектр которой **а)** $\{2, 5, 100, 2021\}$;

б) $\{13, 17\} \cup \{n \mid n \geq 2007\}$; **в)** множество всех чисел, не кратных 3; **г)** множество всех степеней двойки; **д)** множество всех составных чисел.

2. Докажите, что требование отсутствия конечных моделей в критерии Лося–Воота существенно: предъявите неполную теорию, категоричную в некоторой бесконечной мощности.

3. Рассмотрим язык $\{=; +; 0\}$ и теорию в этом языке: абелевы группы с делением без кручения, то есть аксиомы этой теории — аксиомы равенства, аксиомы абелевых групп, $\forall x \exists y \underbrace{(y + y + \dots + y = x)}_{n \text{ штук}}$,

$\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow \neg(\underbrace{x + x + \dots + x = 0}_{n \text{ штук}}))$ (добавлено счётное число таких

аксиом для любого n). Покажите, что эта теория не категорична в счётной мощности, а во всех остальных — категорична.

4. (Критерий Тарского). Докажите, что если $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots$ есть строго расширяющаяся цепь теорий, то их объединение не конечно аксиоматизируемо. (Напоминание: теория — множество формул без свободных переменных, замкнутое относительно выводимости.)

5. Рассмотрим поля как модели сигнатуры $\{=, +, \cdot, 0, 1\}$. Докажите:

(а) класс полей фиксированной характеристики $n \geq 0$ конечно аксиоматизируем;

(б) класс полей всевозможных положительных характеристик не аксиоматизируем;

(в) класс полей характеристики 0 аксиоматизируем, но не конечно аксиоматизируем;

(г) класс бесконечных полей положительных характеристик является объединением аксиоматизируемых классов, но ни он, ни его дополнение не аксиоматизируемы.

6. Рассмотрим множество натуральных чисел как интерпретацию сигнатуры $(=; <)$. Покажите, что в этой интерпретации невыразим трёхместный предикат сложения. (*Указание:* рассмотрите нестандартную модель арифметики и постройте в ней автоморфизм.)