

## Листок №6. Модальная логика

1. Рассмотрим шкалу Крипке  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$  («миры» — целые числа, мир  $n$  «видит» мир  $m$  в точности тогда, когда  $n < m$ ). Определим интерпретацию переменных  $p$  и  $q$  следующим образом: в мире  $n$  истинна переменная  $p$  тогда и только тогда, когда  $n$  чётно; в мире  $n$  истинна переменная  $q$  тогда и только тогда, когда  $n > 0$ . В каких точках полученной модели истинны формулы: **а)**  $\diamond \Box p$ ; **б)**  $\diamond \Box q \wedge \Box \diamond p$ ; **в)**  $\diamond (q \rightarrow \neg p) \wedge \Box \diamond (p \rightarrow q)$ ?

2. Общезначима ли формула  $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow (\diamond \Box p \rightarrow \Box p)$  в шкале Крипке **а)**  $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ ; **б)**  $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ ; **в)**  $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ ?

3. Какие из следующих формул общезначимы во всех шкалах Крипке:

**а)**  $(\Box A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ ; **б)**  $\Box A \rightarrow \diamond A$ ;

**в)**  $\Box(A \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \diamond B)$ ; **г)**  $\Box A \rightarrow (\diamond B \rightarrow \diamond(A \wedge B))$ ?

4. Для каждой из следующих формул опишите множества шкал Крипке, в которых эта формула общезначима: **а)**  $\Box p$ ; **б)**  $\diamond(p \vee \neg p)$ ;

**в)**  $\diamond \Box p \rightarrow \Box \diamond p$ ; **г)**  $\diamond \Box p \rightarrow p$ ; **д)**  $\Box p \rightarrow \diamond p$ ; **е)**  $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ .

5. Существует ли формула, общезначимая во всех шкалах  $(W, R)$ , для которых  $R$  есть линейный порядок, но не доказуемая в **S4**?

6. Напишите модальную формулу, общезначимую в точности в тех шкалах Крипке, в которых **а)** из каждого мира достижимы не более  $n$  миров; **б)** длина максимального пути не больше  $n$ .

*Можете написать такую формулу для конкретного маленького  $n$  — такое частичное продвижение тоже будет засчитано!*