

Листок №4. Выразимость.

1. Рассмотрим сигнатуру с одноместным функциональным символом S и двуместным предикатным символом $=$. В качестве носителя возьмём натуральный ряд \mathbb{N} и рассмотрим интерпретацию S как прибавления единицы, $=$ как совпадения элементов. Докажите, что двуместный предикат $y = x + N$ можно выразить формулой этой сигнатуры, длина которой есть $O(\log N)$.

2. Рассмотрим множество действительных чисел как интерпретацию сигнатуры $(=, +, y = x^2)$. Как выразить трёхместный предикат $xy = z$?

3. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадение точек) и двуместный предикат «находиться на расстоянии 1». Выразите двуместные предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2». Выразите двуместный предикат «находиться на расстоянии $1/2$ ».

4. Покажите, что предикат $y = x + 1$ невыразим в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, f)$, где f — одноместная функция $x \rightarrow (x + 2)$.

5. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в множестве целых положительных чисел с предикатами равенства, « x делит y » и « d равен НОД чисел x и y ».

6. Покажите, что в сигнатуре $(=, +, 0, 1)$ с её естественной интерпретацией \mathbb{R} выразим предикат « $x = \alpha$ » (α — фиксированное вещественное число) тогда и только тогда, когда α рационально.

7. Рассмотрим сигнатуру арифметики $(+, \cdot, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве \mathbb{N} . Докажите, что существует выразимый в этой сигнатуре трёхместный предикат $S(x, a, b)$, обладающий одновременно такими свойствами:

(а) для любых a и b множество $S_{ab} = \{x \mid S(x, a, b)\}$ конечно;

(б) среди множеств S_{ab} при различных парах a, b встречаются все конечные множества.

Указание. Зафиксируйте взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и последовательностями из 0 и 1. Далее выразите предикат «слово x является конкатенацией слов y и z », после чего возьмите в качестве S_{ab} « x короче a и axa есть подслово слова b ».

8. Рассмотрим сигнатуру арифметики $(+, \cdot, =)$ и её естественную интерпретацию на множестве \mathbb{N} . Докажите, что следующие предикаты выразимы в этой сигнатуре: а) « x есть степень четвёрки»; б) « $x = 2^y$ »; в) « x есть y -е по счёту простое число». (*Указание:* воспользуйтесь предыдущей задачей.)