

Листок №3. Теории и теорема компактности.

1. Докажите, что если $T \vdash (A \rightarrow B)$, то $T \vdash (\exists x A \rightarrow \exists x B)$.

2. Рассмотрим сигнатуру, содержащую только двуместный предикатный символ равенства и двуместный предикатный символ R , интерпретации — множества с бинарными отношениями (ориентированные графы). Можно ли выразить формулами первого порядка следующие свойства/отношения графа: **а)** симметричность; **б)** рефлексивность; **в)** транзитивность; **г)** существование клики размера b (множества из b вершин, в котором каждая соединена с каждой стрелками в обе стороны); **д)** конечность множества вершин; **е)** «вершин либо чётное число, либо бесконечно много»; **ё)** ацикличность; **ж)** связность?

3. Покажите, что теорема о полноте в сильной форме является следствием теоремы компактности и теоремы о полноте в слабой форме.

Справочные данные.

Теорема о полноте в сильной форме: любое непротиворечивое множество замкнутых формул имеет модель.

Теорема о полноте в слабой форме: любая общезначимая формула выводима в исчислении предикатов.

Теорема компактности: пусть Γ — множество замкнутых формул некоторой сигнатуры, и любое его конечное подмножество имеет модель. Тогда и само множество Γ имеет модель.

4. Существует ли теория, нормальными моделями которой являются все бесконечные группы и только они?

5. Существует ли теория, нормальными моделями которой являются все конечные группы и только они?

6. Докажите, что всякий частичный порядок может быть продолжен до линейного. (Указание: воспользуйтесь теоремой компактности.)