Листок №2. Логические языки.

Напоминание:
Терм — переменная или имя объекта.
Формула *общезначима*, если она истинна в любой структуре в любом контексте.
Формула *выполнима*, если она истинна в какой-то структуре в некотором контексте.
Высказывание — формула без свободных переменных.

1. [1 балл] Приведите пример булевой функции n аргументов, у которой любая дизъюнктивная и любая конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены длины n.

2. [1 балл] Приведите пример высказывания в языке без равенства, которое истинно в некоторой 3-элементной структуре и ложно во всех 2-элементных структурах.

3. [1 балл] Приведите пример высказывания, которое не общезначимо, но истинно во всех конечных структурах.

4. [1 балл] Пусть сигнатура σ содержит только одноместные имена отношений. Докажите, что всякая выполнимая формула этой сигнатуры, содержащая n различных имён отношений, выполнима в некоторой конечной структуре, содержащей не более 2^n элементов. Выведите отсюда, что существует алгоритм, проверяющий выполнимость формул сигнатуры σ.

5. [1 балл] Задайте бескванторной формулой в сигнатуре $(=, <, +, \cdot, 0, 1)$ множество таких троек чисел $\langle p, q, r\rangle \in \mathbb{R}^3$, что уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ имеет ровно два положительных корня.

6. [1 балл] Задайте бескванторной формулой в сигнатуре $(=, +, \cdot, 0, 1)$ множество таких четвёрок чисел $\langle p, q, r, s\rangle \in \mathbb{C}^4$, что уравнения $z^2 + pz + q = 0$ и $z^2 + rz + s = 0$ имеют общий корень.

7. [1 балл] Задайте бескванторной формулой в сигнатуре $(=, +, \cdot, 0, 1)$ множество таких троек чисел $\langle p, q, r\rangle \in \mathbb{C}^3$, что уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ имеет кратный корень.

8. [1 балл за 2 пункта, 2 балла за 3 пункта] Рассмотрим естественную интерпретацию сигнатуры $\langle <^2, =^2\rangle$ на множестве $\mathbb{Q}$. Постройте бескванторную формулу, эквивалентную (в этой интерпретации)
а) формуле $\exists x\, (x < y_1 \wedge x = y_2)$;
б) формуле $\forall x\, (x < y_1 \vee y_2 < x \vee x = y_2)$;
в) формуле $\forall x\, (x < z_1 \to (\exists y\, (x < y \wedge y < z_2)))$.

Задачи после черты можно сдавать вплоть до конца семестра!

9. [5 баллов] *Интерполяционная лемма Крейга.* Пусть $\varphi \to \psi$ — пропозициональная тавтология (то есть общезначимая бескванторная формула в сигнатуре с только нульместными символами отношений). Покажите, что найдётся формула τ, которая включает в себя только общие для φ и ψ переменные, для которой формулы $\varphi \to \tau$ и $\tau \to \psi$ являются тавтологиями.

10. [по 2 балла за каждый пункт] **а)** *Теорема Эрбрана.* Докажите, что если формула $\exists x A$ (где A — бескванторная формула некоторой сигнатуры) общезначима, то существует конечный набор термов $t_1, \ldots, t_n$ этой сигнатуры, что общезначима формула $A(t_1) \vee \ldots \vee A(t_n)$.
б) Покажите, что число термов n нельзя ограничить сверху: для любого n существует бескванторная формула A, что $\exists x A$ общезначима, а $A(t_1) \vee \ldots \vee A(t_{n-1})$ не общезначима ни для каких термов $t_1, \ldots, t_{n-1}$.
в) Покажите, что бескванторность формулы A существенна: придумайте такую формулу B, что $\exists x B$ общезначима, а $B(t_1) \vee \ldots \vee B(t_n)$ не общезначима ни для каких термов $t_1, \ldots, t_n$ (при любом n).
(в каждом пункте термы t_i подставляются вместо переменной x)

11. [5 баллов] Докажите возможность элиминации кванторов в теории рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в сигнатуре $\langle =, <, +, \{r \mid r \in \mathbb{Q}\}\rangle$ (то есть в сигнатуру добавлены константы для всех элементов модели).

12. [5 баллов] Пусть единичный квадрат разрезан на конечное число квадратов. Докажите, что тогда все они имеют рациональные стороны. (*Указание.* Как можно воспользоваться предыдущей задачей?)