

Листок №1. Теория множеств.

1. Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных A_1, \dots, A_n с помощью (многократно используемых) операций \cup, \cap, \setminus ? (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.)
2. Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции \cup, \cap, \setminus неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором каждое множество или пусто, или состоит из одного элемента.
3. Докажите, что всякую функцию $F : A \rightarrow B$ можно представить в виде композиции $H \circ G$, где G — инъективная функция, а H — сюръективная.
4. Множество U содержит $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно из них не является подмножеством другого. Каково может быть максимальное значение k ?
5. Существуют ли два неизоморфных плотных линейно упорядоченных множества мощности континуум без наименьшего и наибольшего элементов?
6. Постройте взаимно-однозначное соответствие между множествами $[0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5] \cup \dots$ и $[0; 1]$.
7. Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных им частей можно сложить круг. (Указание: воспользуйтесь теоремой Кантора-Бернштейна.)
8. Пусть отрезок $[0; 1]$ разбит на счётное число частей. Докажите, что хотя бы одна из них имеет мощность континуума.
9. На плоскости отметили счётное число точек. Докажите, что любые две не отмеченные точки можно соединить двухзвенной ломаной, на которой не будет отмеченных точек.
10. Постройте функцию из \mathbb{R} в \mathbb{R} , график которой на плоскости пересекает любой не вертикальный отрезок.