**Листок №1. Теория множеств.**

**1.** *(Переаттестация мудрецов)*
**а)** [1 балл] В просторном купе поезда едут шестеро Мудрецов. Поезд въезжает в туннель, и поскольку окна купе открыты, то копоть от паровоза испачкала лица кое-кого из мудрецов. В купе нет зеркала, поэтому каждый из Мудрецов видит лица других, но не видит своего. А поскольку они все не только очень умные, но и гордые, то каждый из них считает ниже своего достоинства спрашивать у других, испачкано ли у него лицо.
Все мудрецы знают, что на любой станции можно выйти и умыться, но никто из них не хочет выходить, не зная точно, что у него лицо грязное, чтоб не уронить свое достоинство перед другими. Поэтому станция за станцией никто не выходит.
На одном из перегонов между станциями в купе заглядывает проводник. Он видит, что кое у кого испачканы лица и сообщает, что грязное лицо можно умыть на любой станции.
На третьей станции, на которой остановились после визита проводника, все Мудрецы с грязными лицами (и только они) вышли и умылись.
У скольких мудрецов были испачканы лица?
Что нового сообщил мудрецам проводник? Напомню, все и так знали, что на станции можно умыться.
**б)** [2 балла] Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает каждому колпак белого, синего или красного цветов. Все мудрецы видят цвета всех колпаков впереди стоящих мудрецов, а цвет своего и всех стоящих сзади не видят. Раз в минуту один из мудрецов должен выкрикнуть один из трёх цветов (каждый мудрец выкрикивает цвет один раз). После окончания этого процесса король казнит каждого мудреца, выкрикнувшего цвет, отличный от цвета его колпака. Накануне переаттестации все сто членов Совета Мудрецов договорились и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?
**в)** [3 балла] Счётное множество мудрецов выстроены в натуральный ряд (лицом в сторону возрастания ряда, так что каждый видит перед собой бесконечное число мудрецов). Каждый из мудрецов знает свой номер в последовательности. Каждому мудрецу надета на голову шляпа одного из трёх цветов, и каждому задается вопрос о цвете его шляпы. Всех, кто дает неправильный ответ, казнят. Мудрецы не слышат чужих ответов на заданные им вопросы (и не видят казней неправильно ответивших коллег) и, следовательно, не могут получать никакой новой информации. Могут ли они заранее договориться так, чтобы казнено было лишь конечное число мудрецов?

**2.** [1 балл] Сколько различных выражений для множеств можно составить из переменных $A_1, \ldots, A_n$ с помощью (многократно используемых) операций $\cup, \cap, \setminus$? (Два выражения считаются одинаковыми, если они равны при любых значениях переменных.)

**3.** [1 балл] Докажите, что если какое-то равенство, содержащее переменные для множеств и операции $\cup, \cap, \setminus$ неверно, то можно найти контрпример к нему, в котором каждое множество или пусто, или состоит из одного элемента.

**4.** [1 балл] Докажите, что квадрат можно разбить на две части так, что из подобных им частей можно сложить круг.

**5.** [1 балл] Пусть отрезок $[0;1]$ разбит на счётное число частей. Докажите, что хотя бы одна из них имеет мощность континуума.

**6.** [2 балла] Множество $U$ содержит $2n$ элементов. В нём выделено $k$ подмножеств, причём ни одно из них не является подмножеством другого. Каково может быть максимальное значение $k$?

**7.** [2 балла] Докажите, что количество способов представить число $n$ в виде суммы $k$ слагаемых равно количеству способов представить число $n$ в виде суммы нескольких слагаемых, наибольшее из которых равно $k$. (В обоих случаях представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Во втором случае в сумме может быть несколько наибольших слагаемых.)

---

# Задачи после черты можно сдавать вплоть до конца семестра!

**8.** [5 баллов] *(Игра Банаха-Мазура, версия с последовательностями.)*
Обозначим через $B^\omega$ множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1. Пусть $A \subset B^\omega$. Поочерёдно I и II игроки называют числа 0 или 1, строя таким образом бесконечную последовательность $u_0 u_1 u_2 \ldots$ (то есть первый игрок называет элементы этой последовательности с чётными номерами, а второй — с нечётными). I игрок выиграет, если $u_0 u_1 u_2 \ldots \in A$, а иначе выиграет II игрок.
**Аксиома детерминированности** гласит, что во всякой такой игре один из игроков имеет выигрышную стратегию.
Докажите, что из аксиомы детерминированности следует, что любое подмножество континуума или конечно, или счётно, или континуально.

**9.** [5 баллов] *(Бесконечная теорема Рамсея.)* Множество всех $k$-элементных подмножеств бесконечного множества $A$ разбито на $l$ классов ($k$, $l$ — натуральные числа). Докажите, что найдётся бесконечное множество $B \subset A$, все $k$-элементные подмножества которого принадлежат одному классу.
*Подсказка:* попробуйте доказать эту теорему для $k = 2$.

**10.** [5 баллов] Докажите, что существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что её график пересекает любой невертикальный отрезок.
*Комментарий:* вам понадобится следующий **факт:** континуум можно вполне упорядочить так, чтобы любой его начальный отрезок по мощности был меньше, чем континуум. Далее воспользоваться трансфинитной индукцией.