

Временные логики 2019

Лекция 1

- Временные формулы.
- Шкалы и модели Крипке. Истинность временной формулы в мире (точке) модели Крипке. Истинность в модели. Общезначимость в шкале Крипке.
- Нормальные бимодальные логики. Логика $\mathbf{K.t}$. Нормальные временные логики.
- Теорема корректности для семантики Крипке. Логика шкалы и класса шкал ($\mathbf{TL}(F)$, $\mathbf{TL}(C)$). Полные логики.
- Всякая полная логика L имеет вид $\mathbf{TL}(V(L))$, где $V(L) = \{F \mid F \models L\}$ (класс всех L -шкал, «многообразии»).
- Каноническая модель Крипке для временной логики. Основная лемма о канонической модели:

$$M_L, x \models A \Leftrightarrow A \in x.$$

- Теорема: $M_L \models L$.
- Канонические логики ($F_L \models L$). Полнота канонических логик.
- Зеркальный перевод: $A \mapsto A^-$. Принцип зеркальности:

$$\mathbf{K.t} + \Gamma \vdash A \Rightarrow \mathbf{K.t} + \Gamma^- \vdash A^-$$

Лекция 2

Лемма 2.1 Если $L_1 \subseteq L_2$, то M_{L_2} - порожденная подмодель M_{L_1}

Лемма 2.2 Если $\mathbf{K.t} + \Gamma \subseteq L$ и логика $\mathbf{K.t} + \Gamma$ — каноническая, то $F_L \models \Gamma$.

Лемма 2.3 Если A — замкнутая формула (т.е. не содержит переменных), то логика $\mathbf{K.t} + A$ — каноническая.

Предложение 2.4 Рассмотрим «аксиому Чёрча — Россера»:

A2. $\Diamond^- \Diamond p \rightarrow \Diamond \Diamond^- p$.

(1) $(W, R) \models A2 \Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq R \circ R^{-1}$

(2) Логика $\mathbf{K.t} + A2$ — каноническая.

Предложение 2.4⁻

(1) $(W, R) \models A2^- \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq R^{-1} \circ R$

(2) Логика $\mathbf{K.t} + A2^-$ — каноническая.

Задачи.

1. Докажите, что $\mathbf{K.t} + A2 = \mathbf{K.t} + \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$

2. Докажите, что если логика $\mathbf{K.t} + A$ — каноническая, то $\mathbf{K.t} + A^-$ — каноническая.

3. Докажите, что если логика $\mathbf{K.t} + A$ полна, то $\mathbf{K.t} + A^-$ полна.

4. Докажите, что $\mathbf{K.t} + A2 \not\equiv A2^-$.

Предложение 2.5 Рассмотрим аксиому

A3. $\Diamond \neg \Diamond p \rightarrow p \vee \Diamond p \vee \Diamond \neg p$.

(1) $(W, R) \models A3 \Leftrightarrow R$ не ветвится в будущем: $R^{-1} \circ R \subseteq R \cup I_W \cup R^{-1}$ (где I_W - отношение равенства на W).

(2) Логика $\mathbf{K.t} + A3$ — каноническая.