ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ (2015/16)

Задачи и упражнения

Если не оговорено противное, рассматриваются сигнаруры и теории с равенством и нормальные модели.

1. (а) Докажите, что композиция гомоморфизмов - гомоморфизм; то же - для вложений и изоморфизмов.

(б) Докажите, что отношение изоморфности моделей транзитивно.

2. *Позитивная формула* строится из атомарных с помощью $\wedge$, $\vee$, $\forall$. Докажите, что если существует сюръективный гомоморфизм M на N, φ - позитивное предложение и $M \models \varphi$, то $N \models \varphi$.

3. Докажите следующие утверждения для теории T и класса моделей $\mathcal{C}$ той же сигнатуры.

(a) $T \subseteq Th(Mod(T))$

(b) $\mathcal{C} \subseteq Mod(Th(\mathcal{C}))$

(c) $[T] = Th(Mod(T))$

(d) $Mod(Th(\mathcal{C}))$ - наименьший Δ-элементарный класс, содержащий $\mathcal{C}$

(Здесь $[T] = \{\varphi \in CFm_L \mid T \models \varphi\}$ - логическое замыкание T, $Th(\mathcal{C})$ - элементарная теория класса $\mathcal{C}$.)

Класс всех моделей некоторой теории называется Δ-*элементарным*, конечной теории - *элементарным*.

4. (a) Докажите, что теория T полна, если и только если Mod(T) — минимальный Δ-элементарный класс (т.е. из $Mod(T_1) \subseteq Mod(T)$ следует $Mod(T_1) = Mod(T)$).

(б) Установите биекцию между классами эквивалентности полных теорий в сигнатуре L (по отношению $T_1 \sim T_2 := [T_1] = [T_2]$) и классами элементарной эквивалентности L-структур.

(в) Докажите, что $T_1 \sim T_2 \iff Mod(T_1) = Mod(T_2)$.

5. Рассмотрим сигнатуру абелевых групп: (0, + , –, =) (где 0 - константа, + - 2-местный функциональный символ, – - 1-местный функциональный символ). Докажите, что в этой сигнатуре

(a) $\mathbf{Q} \ncong \mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$

(b) $\mathbf{Z} \not\equiv \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

(c) $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \not\equiv \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

(d) $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Q} \not\equiv \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$

6. Докажите, что в конечной сигнатуре с одноместными предикатами всякая теория имеет не более счетного числа попарно неизоморфных счетных моделей.

7. Докажите, что в счетной сигнатуре всякая теория имеет не более континуума попарно неизоморфных счетных моделей.

8. Сколько существует попарно неизоморфных счетных структур в счетной сигнатуре с одноместными предикатами?

9. Докажите, что теория с одним 2-местным предикатом и аксиомами симметричности и иррефлексивности *(теория графов)* имеет континуум попарно неизоморфных счетных моделей.

10. Напишите аксиомы теории отношения эквивалентности с бесконечным числом классов. Сколько неизоморфных счетных моделей имеет эта теория? Полна ли она?

11. Для конечной модели M конечной сигнатуры постройте замкнутую формулу α_M, такую что для любой модели N
$N \models \alpha_M$, если и только если M вкладывается в N.

12. Для конечной модели M конечной сигнатуры постройте замкнутую формулу β_M, такую что для любой модели N
$N \models \alpha_M$, если и только если существует нестрогий гомоморфизм N на M.
[*Нестрогий гомоморфизм* сохраняет все операции и истинность всех предикатов, но может не сохранять их ложность.]

13. Сколько неизоморфных конечных моделей может иметь полная теория?

Теория называется *конечно аксиоматизируемой*, если она эквивалентна некоторой конечной теории (см. задачу 4б).

Возрастающая последовательность теорий $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots$ называется *строго возрастающей*, если эти теории попарно не эквивалентны.

14. Докажите, что объединение строго возрастающей последовательности теорий не является конечно аксиоматизируемой теорией.

15. Докажите, что теория всех бесконечных моделей в сигнатуре {=} не конечно аксиоматизируема. Полна ли эта теория?

16. Рассмотрим игры $EF_m(L_6, L_7)$, где $L_n=(\{1,2,...,n\},<)$, при различных m. Выясните, при каких m второй игрок имеет выигрышную стратегию.

17. $\omega + \zeta$ обозначает порядковую сумму натуральных и целых чисел (копия целочисленной прямой расположена после множества натуральных чисел). Выясните, какой игрок имеет выигрышную стратегию в $EF_6(\omega, \omega + \zeta)$.

18. Докажите, что теория из задачи 15 счетно категорична.

19. Напишите все нормальные формы Хинтикки глубины 1 от 2 переменных в сигнатуре с одним двуместным предикатным символом P и равенством.

20. В сигнатуре из предыдущей задачи запишите формулу $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ в виде дизъюнкции форм Хинтикки.

21. Напишите все нормальные формы Хинтикки глубины 2 от 1 переменной в сигнатуре с одним двуместным предикатным символом < и равенством в теории LO строгого линейного порядка.

22. В теории LO из предыдущей задачи представьте формулу $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x<z \wedge z<y)$ в виде дизъюнкции форм Хинтикки.

23. Дайте описание всех финитно элементарных классов для сигнатуры {=}.

24. Является ли класс всех конечных моделей четной мощности финитно элементарным в сигнатуре {P, =}, где P - одноместный предикат?

25. Является ли класс всех конечных моделей четной мощности финитно элементарным в сигнатуре {P, =}, где P - двуместный предикат?

26. Рассмотрим счетную сигнатуру $L_3 = (<, c_0, c_1, ...)$, где c_i - константы. Пусть T_3 - теория неограниченных плотных линейных порядков в сигнатуре L_3 с дополнительными аксиомами $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$,...

а) Докажите, что T_3 имеет ровно 3 неизоморфные счетные модели. (Указание: рассмотрите верхние границы множества констант.)

б) Докажите, что T_3 полна. (Указание: докажите элементарную эквивалентность счетных моделей, заметив, что в каждой формуле встречается лишь конечное число констант).

в) Пусть $L_4 = L_3 \cup \{P\}$, где P — одноместный предикат. Пусть T_4 получается из T_3 добавлением аксиом

$\forall x\ \forall y > x\ \exists z\ \exists w\ (x<z<y \wedge x<w<y \wedge P(z) \wedge \neg P(w))$ и $P(c_n)$, где $n \in \omega$.

Докажите, что T_4 - полная теория, имеющая в точности 4 неизоморфные счетные модели.

27. Обобщите предыдущую задачу: постройте теорию, имеющую в точности n неизоморфных счетных моделей (где n > 4).

28. Рассмотрим теорию Th(**N**, 0, S), где S(x)=x+1 — функция следования.

(а) Является ли эта теория конечно аксиоматизируемой?

(б) Является ли она счетно категоричной?

(в) Докажите, что в этой теории элиминируются кванторы.

(г) Докажите, что эта теория разрешима,

29. Докажите, что в теории **Z** в сигнатуре {+, 0, - (одноместный)} кванторы не элиминируются.

30. Рассмотрим сигнатуру с одним двуместным предикатом E и равенством. Для каждой из следующих теорий выясните, элиминируются ли в ней кванторы.

а) E - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много классов, и все они 2-элементны.

б) E - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много классов, и все они бесконечны.

в) E - отношение эквивалентности, которое имеет бесконечно много 2-элементных и бесконечно много 3-элементных классов, и других классов нет.

г) E - отношение эквивалентности, и для любого конечного n, E имеет один класс мощности n.

31. Для сигнатуры $\{<, P^1\}$ рассмотрим модели вида (**Q**,<,X), где $X \subseteq$ **Q**.

а) Найдите q(T) для T = Th({(**Q**,<,X)| X выпукло}.

b) Найдите q(T) для T = Th({(**Q**,<,X)| X открыто и всюду плотно в топологии **Q**}.