

## Алгебраическая и категорная логика

июнь 2012

1. Предкатегории и категории. Примеры категорий. Двойственная категория.
2. Единственность обратной стрелки. Изострелка. Изоморфные объекты. Начальные и финальные объекты.
3. Функторы. Вложение и полное вложение категорий. Подкатегория. Полная подкатегория. Изоморфизм категорий. Образ вложения.
4. Дискретные категории. Квазипорядки и ассоциированные с ними категории.
5. Моноиды и категории с одним объектом.
6. Теорема Кэли о представлении моноидов. Вложение малой категории в SET.
7. Категория CAT. Вложимость в нее категории моноидов и категории квазипорядков.
8. Категория конусов над парой и над конечным семейством объектов. Изоморфизмы конусов. Произведение двух объектов и конечного семейства объектов. Произведения в SET. Коммутативность и ассоциативность произведения с точностью до изоморфизма. Построение конечных произведений из произведений пар объектов.
9. Категория коконусов над парой и над конечным семейством объектов. Копроизведение (сумма) конечного семейства объектов. Конечные копроизведения в SET. Коммутативность и ассоциативность копроизведения с точностью до изоморфизма. Построение конечных копроизведений из копроизведений пар объектов.
10. Произведение и копроизведение произвольного семейства объектов. Произведения и копроизведения в SET. Произведения и копроизведения в категории, ассоциированной с частичным порядком. Решетки и полные решетки.
11. Из существования произвольных нижних граней в ЧУМ следует существование произвольных верхних граней.
12. Категории стрелок. Расслоенные произведения (декартовы квадраты); их единственность. Расслоенные произведения в SET.
13. «Лемма о призме» для расслоенных произведений. Функтор обратного образа.
14. Амальгамы (кодекартовы квадраты). Амальгамы в SET.
15. Ном-функторы. Сечения, ретракции, монострелки, эпистрелки; связь их в общем случае и в SET.
16. Уравнитель. Всякий уравнитель – монострелка. Построение уравнителей в SET.
17. Построение расслоенных произведений в категории с уравнителями и конечными произведениями.
18. Построение уравнителей и конечных произведений в категории с расслоенными произведениями и финальным объектом.

19. Диаграммы в категории и их пределы. Примеры пределов. Полнота и конечная полнота. (Конечная) полнота категорий с уравнителями и (конечными) произведениями.
20. Копредел диаграммы. Обратные и прямые пределы в SET.
21. Сохранение пределов. Непрерывные функторы. Непрерывность Ном-функтора.
22. Экспонента в категории. Декартово замкнутые категории. Декартова замкнутость SET. Экспонента как функтор.
23. Гейтинговы алгебры. Гейтингова алгебра –дистрибутивная решетка. Полнота и полная дистрибутивность. Булевы алгебры.
24. Типовое  $\lambda$ -исчисление и  $\lambda$ -теории. Построение категории по  $\lambda$ -теории.
25. Декартова замкнутость категории, ассоциированной с  $\lambda$ -теорией.
26. Унивалентные и полные функторы. Эквивалентность категорий. Образ полного функтора.
27. Скелетальная категория. Скелет категории, его существование. Эквивалентность категории и ее скелета. Эквивалентность категорий как изоморфность скелетов.
28. Морфизмы функторов (естественные преобразования). Категория функторов. Изоморфизм функторов. Примеры изоморфных функторов.
29. Построение  $\lambda$ -теории, ассоциированной с декартово замкнутой категорией.
30. Лемма о бифункторе. Экспоненты в категории CAT.
31. Квазиобратный функтор. Признак эквивалентности категорий.
32. Представимые функторы: определение и примеры.
33. Функтор Ионеды. Лемма Ионеды.
34. Теорема о полном вложении категории C в категорию функторов  $SETC^\circ$ .
35. Применения леммы Ионеды для доказательства свойств декартово замкнутых категорий. Лемма о монострелках в категории функторов  $SETC^\circ$ .
36. Полнота категории  $SETC^\circ$ .
37. Категория элементов. Контравариантный функтор  $C^\circ \rightsquigarrow SET$  как предел представимых функторов.
38. Подобъект. Классификатор подобъектов. Построение классификаторов подобъектов в SET.
39. Сито и функтор  $\Omega: C^\circ \rightsquigarrow SET$ . Классификатор подобъектов в  $SETC^\circ$ .
40. Непрерывность умножения на данный функтор в категории  $SETC^\circ$ .
41. Экспоненты в категории  $SETC^\circ$ .
42. Эквивалентные определения сопряженных функторов.
43. Единственность сопряженного функтора.
44. Алгебра термов. Функтор свободы  $F_\Omega$ .
45. Значение терма в алгебре. Образ значения при гомоморфизме.

46. Монострелки в категории  $\Omega$ -алгебр. Сохранение тождеств для подалгебр и гомоморфных образов.
47. Произведения  $\Omega$ -алгебр. Сохранение тождеств для произведений.
48. Эквациональные теории и многообразия. Теорема корректности для эквациональных теорий. Теорема Биркогофа (формулировка).
49. Свободные алгебры многообразий.
50. Сопряженность функтора свободы и забывающего функтора. Теорема полноты для эквациональных теорий.