Исчисление секвенций: первое знакомство

Данияр Шамканов
daniyar.shamkanov@gmail.com

Просеминар по математической логике
и информатике
2023

Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных $\{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина).

Отрицание $\neg A$ будем понимать как сокращение для формулы $(A \to \bot)$.

Секвенцией называется выражение вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные мультимножетсва формул.

Примеры:

- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \to q\}$,

Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных $\{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина).

Отрицание $\neg A$ будем понимать как сокращение для формулы $(A \to \bot)$.

Секвенцией называется выражение вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные мультимножетсва формул.

Примеры:

- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \to q\}$,
- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \to q\}$,

Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных $\{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\to$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина).

Отрицание $\neg A$ будем понимать как сокращение для формулы $(A \to \bot)$.

Секвенцией называется выражение вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные мультимножетсва формул.

Примеры:

- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \to q\}$,
- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \to q\}$,
- $\varnothing \Rightarrow \{p, q, q, p \to q\}$,

Классическая логика высказываний

Формулы классической логики высказываний строятся из пропозициональных переменных $\{p, q, r, \dots\}$ с помощью логических связок $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\rightarrow$ (если — то), $\bot$ (ложь), $\top$ (истина).

Отрицание $\neg A$ будем понимать как сокращение для формулы $(A \rightarrow \bot)$.

Секвенцией называется выражение вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где Γ и Δ — произвольные конечные мультимножетсва формул.

Примеры:

- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, p \rightarrow q\}$,
- $\{q \vee r\} \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$,
- $\varnothing \Rightarrow \{p, q, q, p \rightarrow q\}$,
- $\Rightarrow p, q, q, p \rightarrow q$.

Исчисление секвенций для классической логики высказываний

Начальные секвенции и правила вывода:

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \qquad \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta, \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta,$$

$$\wedge_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \qquad \wedge_{\mathrm{R}}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \qquad \vee_{\mathrm{R}}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\to_{\mathrm{L}}\ \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta}, \qquad \to_{\mathrm{R}}\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}.$$

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема, если у неё существует доказательство, т.е. конечное дерево секвенций, построенное по правилам вывода, в листьях которого стоят начальные секвенции, а в корне — секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Мы будем говорить, что доказуема формула A, если доказуема секвенция $\Rightarrow A$ (т.е. $\varnothing \Rightarrow \{A\}$).

Доказательство формулы $(p \wedge q) \to p$:

Доказательство формулы $(p \to q) \vee (q \to p)$:

Доказательство формулы $\neg\neg p \to p$:

Доказуема ли формула $p \to \neg p$? Формула $(p \vee q) \to (p \wedge q)$?

Набор значений (0 или 1) пропозициональных переменных, при котором все формулы из Γ истинны, а все формулы из Δ ложны, будем называть контрпримером к секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Если у секвенции нет контрпримера, то будем говорить, что она общезначима.

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций.

Лемма

В каждом из правил вывода нижняя секвенция имеет контрпример тогда и только тогда, когда хотя бы одна из верхних секвенций имеет контрпример.

Иначе говоря, заключение любого правила общезначимо, если и только если все его посылки общезначимы.

$$\wedge_L \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \qquad \wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_L \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \qquad \vee_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\rightarrow_L \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}, \qquad \rightarrow_R \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}.$$

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций.

Доказательство

Вывод (1) из (2) получается индукцией по высоте доказательства секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Посмотрим на вывод (2) из (1).

Модальная логика K

Модальные формулы строятся из пропозициональных переменных $\{p, q, r, \dots\}$ с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\bot$, $\top$ и дополнительной одноместной связки $\Box$.

Модальную логику K можно определить с помощью следующего акиоматического исчисления.

Схемы аксиом:

- тавтологии классической логики высказываний,
- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

Правила вывода:

$$\text{mp}\ \frac{A \qquad A \to B}{B}\,, \qquad \text{nec}\ \frac{A}{\Box A}\,.$$

Исчисление секвенций для логики K

Для конечного мультимножества формул $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ определим $\Box\Gamma := \Box A_1, \ldots, \Box A_n$.

Исчисление секвенций для логики K получается из предшествующего исчисления секвенций добавлением правила вывода

$$\Box_K \; \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta} \; .$$

Доказательство формулы $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$:

Доказуема ли формула $\Box p \to \Box\Box p$?

Модель Крипке $\mathcal{M}$ с отмеченной точкой w будем называть контрмоделью для секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, если все формулы из Γ истинны в мире w, а все формулы из Δ ложны.

Если для секвенции нет контрмодели, то будем говорить, что она общезначима.

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. $\mathsf{K} \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима;
3. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций для логики K.

Лемма

Для каждого правил вывода, за исключением правила $(\Box_K)$, общезначимость заключения влечет общезначимость посылок.

Доказательство в случае правила $(\wedge_R)$

$$\wedge_R \, \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} .$$

Секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется насыщенной, если мультимножества Γ и Δ не содержат формул вида $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$.

Лемма

Всякая общезначимая насыщенная секвенция является начальной секвенцией или получается применением правила $(\Box_K)$ из другой общезначимой секвенции.

Доказательство леммы

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. $\mathsf{K} \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима;
3. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций для модальной логики K.

Доказательство

Из (1) следует (2), поскольку все формулы, которые доказуемы в логике K, истинны в каждом мире любой модели Крипке.

Вывод (1) из (3) получается индукцией по высоте доказательства секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Посмотрим на вывод (3) из (2).

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \qquad \Gamma, \bot \Rightarrow \Delta, \qquad \Gamma \Rightarrow \top, \Delta,$$

$$\wedge_L \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow \Delta}, \qquad \wedge_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta},$$

$$\vee_L \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}, \qquad \vee_R \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta},$$

$$\rightarrow_L \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}, \qquad \rightarrow_R \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta},$$

$$\Box_K \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta}.$$

Логика Гёделя-Лёба GL

Логику Гёделя-Лёба GL можно определить с помощью следующего акиоматического исчисления.

Схемы аксиом:

- тавтологии классической логики высказываний,
- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,
- $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$.

Правила вывода:

$$\mathrm{mp}\ \frac{A \qquad A \to B}{B}\ , \qquad \mathrm{nec}\ \frac{A}{\Box A}\ .$$

Логика GL корректна и полна относительно арифметической семантики, в которой $\Box A$ понимается как утверждение о доказуемости A в арифметике Пеано.

Напомню, что бинарное отношение R на множестве W называется *нётеровым*, если не существует бесконечных последовательностей вида $w_0 R w_1 R w_2 R w_3 \ldots$.

В случае логики GL вместо произвольных шкал (моделей) Крипке мы рассматриваем шкалы (модели) с транзитивным и нётеревым отношением и называем их GL-*шкалами* (GL-*моделями*).

Транзитивную нётерову модель Крипке $\mathcal{M}$ с отмеченной точкой w будем называть GL-контрмоделью для секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, если все формулы из Γ истинны в мире w, а все формулы из Δ ложны.

Если для секвенции нет GL-контрмодели, то будем говорить, что она общезначима в классе GL-шкал.

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. $\mathsf{GL} \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_1;
4. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_2.

Первое исчисление секвенций для логики GL

Исчисление секвенций S_1 для логики GL получается из предшествующего исчисления секвенций заменой правила вывода ($\Box_K$) на правило вывода

$$\Box \, \frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta} \, .$$

Кроме того, в этом исчислении мы допускаем *нефундированные доказательства* (или *∞-доказательства*), т.е. произвольные построенные по правилам вывода деревья секвенций, в листьях которых стоят начальные секвенции.

Нефундированное доказательство секвенции $\Box(\Box p \to p) \Rightarrow \Box p$:

Лемма

Для каждого правил вывода, за исключением правила $(\Box)$, общезначимость заключения в классе GL-шкал влечет общезначимость посылок в этом же классе.

Вспоминаем, что секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ называется насыщенной, если мультимножества Γ и Δ не содержат формул вида $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$.

Лемма

Относительно класса GL-шкал всякая общезначимая насыщенная секвенция является начальной секвенцией или получается применением правила $(\Box)$ из другой общезначимой секвенции.

Следствие

Всякая общезначимая в классе GL-шкал секвенция доказуема в исчислении секвенций S_1.

Второе исчисление секвенций для логики GL

Исчисление секвенций S_2 для логики GL получается из предшествующего исчисления секвенций добавлением начальных секвенций вида

$$\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$$

и заменой правила вывода ($\Box$) на правило вывода

$$\Box_{GL} \ \frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box A \Rightarrow A}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta} \ .$$

В этом исчислении мы допускаем только конечные деревья секвенций в качестве доказательств.

Лемма

Всякая секвенция, которая доказуема в исчислении S_1, также доказуема в исчислении S_2.

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. $\mathsf{GL} \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_1;
4. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_2.

Доказательство

Из (1) следует (2), поскольку все формулы, которые доказуемы в логике GL, истинны в каждом мирелюбой GL-модели.

Вывод (3) из (2) уже получен.

Вывод (4) из (3) получен в лемме.

Вывод (1) из (4) получается индукцией по высоте доказательства секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$ в исчислении S_2.

Теорема о неподвижной точке для логики GL

Пусть каждое вхождение переменной p в формулу $A(p)$ находится в области действия модальной связки $\Box$. Тогда существует единственная с точностью до доказуемой эквивалентности формула B такая, что $\mathsf{GL} \vdash B \leftrightarrow A(B)$.

Расширим наш язык, допустив *регулярные нефундированные формулы* (или *регулярные ∞-формулы*).

Всякую обычную формулу языка модальной логики можно представить как конечное дерево, построенное с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\Box$, и такое, что его листьяпомечены переменными и константами $\bot$ и $\top$.

Понятие ∞-формулы получается, если мы опустим условие конечности и добавим, что в каждой бесконечной ветви дерева ∞-формулы должно встречаться бесконечное число вершин, помеченных связкой $\Box$.

Будем говорить, что ∞-формула является регулярной, если её множество подформул конечно, т.е. дерево данной ∞-формулы содержит лишь конечное число неизоморфных поддеревьев.

Истинность ∞-формулы C в мире w некоторой GL–модели $\mathcal{M}$ определяется индукцией по ординальному рангу w с вложенной индукцией по локальной высоте C:

- $\mathcal{M}, w \nvDash p \iff w \in v(p)$,
- $\mathcal{M}, w \nvDash \bot$,
- $\mathcal{M}, w \vDash \top$,
- $\mathcal{M}, w \vDash A \wedge B \iff \mathcal{M}, w \vDash A$ и $\mathcal{M}, w \vDash B$,
- $\mathcal{M}, w \vDash A \vee B \iff \mathcal{M}, w \vDash A$ или $\mathcal{M}, w \vDash B$,
- $\mathcal{M}, w \vDash A \to B \iff \mathcal{M}, w \nvDash A$ или $\mathcal{M}, w \vDash B$,
- $\mathcal{M}, w \vDash \Box A \iff \forall w' \ (wRw' \Rightarrow \mathcal{M}, w \vDash A)$.

Символами GL^r, S_1^r и S_2^r обозначим соответствующие системы в языке, расширенном регулярными ∞-формулами.

Теорема о полноте

Следующие утверждения равносильны:

1. $\mathsf{GL}^r \vdash \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$;
2. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ общезначима в классе GL-шкал;
3. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_1^r;
4. секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ доказуема в исчислении секвенций S_2^r.

Следствие

Система GL^r консервативно расширяет GL, т.е. обычная формула A доказуема в GL^r тогда и только тогда, когда A доказуема GL.

Лемма

В системе GL^r всякая регулярная ∞-формула доказуемо эквивалентна обычной.

Теорема о неподвижной точке для логики GL

Пусть каждое вхождение переменной p в формулу $A(p)$ находится в области действия модальной связки $\Box$. Тогда существует единственная с точностью до доказуемой эквивалентности формула B такая, что $\mathrm{GL} \vdash B \leftrightarrow A(B)$.

Доказательство

Интерполяционная теорема

Пусть $\mathrm{GL}^r \vdash A \to B$. Тогда существует обычная формула C такая, что $\mathrm{GL}^r \vdash A \to C$ и $\mathrm{GL}^r \vdash C \to B$.

Вывод леммы из интерполяционной теоремы

Спасибо за внимание!