Занятие 8

Три варианта определения термина «перечислимое множество»:
Множество $A \subseteq \Sigma^*$ называется *перечислимым*, если

(Вариант 1) A есть область значений некоторой вычислимой функции.
(Вариант 2) A есть область значений некоторой тотальной вычислимой функции или $A = \emptyset$.
(Вариант 3) A есть область определения некоторой вычислимой функции.

Теорема 1. (Вариант 1) $\Leftrightarrow$ (Вариант 2) $\Leftrightarrow$ (Вариант 3)
Докажем теорему 1. (Разбор д.з.)

1. (Вариант 1) $\Leftrightarrow$ (Вариант 2).

   ($\Leftarrow$) — очевидно, докажем ($\Rightarrow$). Пусть $A = E(f)$, где $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ — вычислимая (частичная) функция. Два случая: $A = \emptyset$ (тривиальный) и $A \neq \emptyset$. Разберем второй. Надо построить тотальную вычислимую функцию $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$, для которой $E(g) = E(f) = A$. Фиксируем некоторое слово $a \in A$. Алгоритм вычисления g :

   Вход: слово $x \in \Sigma^*$.

   - С помощью вычислимой биекции $\varphi : \Sigma^* \to (\Sigma^*)^2$ вычисляем пару слов $(u, v) := \varphi(x)$ (т.е. декодируем x как пару слов).
   - Перебором (в цикле) находим натуральное число n, для которого $S^n(\Lambda) = v$ (т.е. декодируем v как натуральное число).
   - Моделируем n шагов вычисления $f(u)$. Если за это время вычисление закончилось, то в качестве результата возвращаем $f(u)$. Если не закончилось, то возвращаем a.

   Ясно, что g — тотальная вычислимая функция и $E(g) \subseteq E(f)$. Пусть $b = f(u)$ для некоторого u. Т.к. φ — биекция, то найдется x, для которого $\varphi(x) = (u, S^t(\Lambda))$, где t — точное число шагов вычисления $f(u)$. Для такого x будет $g(x) = f(u) = b$. Тем самым, $E(g) = E(f)$.

2. (Вариант 2) $\Rightarrow$ (Вариант 3).

   Если $A = \emptyset$, то A есть область определения нигде не определенной функции, которая вычисляется алгоритмом `while(1){}` .

Если $A = E(g)$, где g тотальная вычислимая функция, то зададим вычислимую функция h следующим алгоритмом (неограниченный последовательный перебор):

Вход: слово $x \in \Sigma^*$.

- Последовательно вычислять $g(u)$ для $u = \Lambda, S(\Lambda), S(S(\Lambda)), ...$ и сравнивать с x. Если (когда) найдется u, для которого $g(u) = x$, то остановиться и положить $h(x) := 1$.

Легко видеть, что $D(h) = E(g)$.

3. (Вариант 3) $\Rightarrow$ (Вариант 1).

   Пусть $A = D(h)$ для вычислимой функции h. Переделаем программу h так, чтобы она делала те же вычисления, но вместо вычисленного значения возвращала аргумент: `h(x); return x`. Для модифицированной таким образом функции h' будет $E(h') = D(h') = D(h)$.

Теорема 2. Существует вычислимая функция $f\colon N \to N$, у которой любое тотальное (т.е. всюду определенное) продолжение $g \supset f$ не является вычислимой функцией.

Доказательство.

I. Построение нумерации вычислимых функций. Фиксируем какой-нибудь универсальный язык программирования и (побуквенное) кодирование его программ словами в алфавите $\Sigma = \{0, 1\}$. Множество всех двоичных кодов программ разрешимо (есть алгоритм провеки синтаксиса), а потому оно перечислимо. Поэтому существует тотальная вычислимая функция, нумерующая коды программ: $n \mapsto p_n$. Пусть φ_n — функция типа $N \to N$, которую вычисляет p_n. (Если программа p_n требует другое количество аргументов или выдает “нечисловой” результат, то значение $\varphi_n(x)$ не определено.)

Допущение: функция $u(n, x) = \varphi_n(x)$ **вычислима.** (Смысл — существует универсальный вычислитель, который применяет программу к входным данным; без него язык программирования бесполезен.)

II. Конструкция функции.

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1, & \text{если } \varphi_x(x) \text{ определено,} \\ \text{не определено,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

III. Свойства функции. а) Она вычислима, т.к. совпадает с $u(x, x)+1$.

б) Пусть $g \supset f$ — любое ее тотальное продолжение. Допустим, что g вычислима. Тогда у нее есть программа p_n, т.е. $g = \varphi_n$. Рассмотрим значение $g(n)$. Оно определено, т.к. g — тотальная функция. Тогда определено $\varphi_n(n)$ (т.к. $g = \varphi_n$), и определено $f(n) = \varphi_x(x) + 1 = g(n) + 1$. Последнее невозможно, т.к. в случае определенности значения $f(n)$, значение $g(n)$ должно совпадать с $f(n)$.

Ч.т.д.

Следствие. а) Множество $K = \{x \in N \mid \varphi_x(x) \text{ определено}\}$ (= область определения функции f) — пример неразрешимого, но перечислимого множества. Тем самым, классы всех перечислимых и всех разрешимых множеств не совпадают.

б) Класс всех перечислимых множеств не замкнут относительно дополнения, $\overline{K}$ ему не принадлежит.

Следствие. Проблема остановки алгоритмически неразрешима. Не существует алгоритма, который по произвольной программе p и по произвольному входному данному x определяет, закончится вычисление программы p на входе x или нет. (Иначе множество K оказалось бы разрешимым.)

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое семейство вычислимых функций типа $N \to N$. Оно называется нетривиальным, если $\mathcal{P} \neq \emptyset$ и существует вычислимая функция $f \notin \mathcal{P}$. Индексным множеством этого семейства называется множество $I_{\mathcal{P}} = \{n \mid \varphi_n \in \mathcal{P}\}$.

Теорема Успенского-Райса. Индексное множество любого нетривиального семейства вычислимых функций неразрешимо.

Доказательство.

I. Построение главной нумерации. Аналогично предыдущему построим вычислимую нумерацию $\varphi_n(x)$ семейства всех вычислимых функций типа $N \to N$ со свойством "главности".

Допущения:

1. Функция $u(n, x) = \varphi_n(x)$ вычислима.

2. Для каждой вычислимой функции $\psi(x, y)$ существует тотальная вычислимая функция $s(x)$, для которой выполняется тождество $\varphi_{s(x)}(y) = \psi(x, y)$. (Смысл: преобразование кода, состоящее в фиксации одного формального параметра, — простое, а потому — тотальное.)

II. Сведение к K. Пусть ζ — нигде не определенная функция и $\zeta \notin \mathcal{P}$. (Если это не так, то вместо $\mathcal{P}$ будем рассматривать дополнение этого семейства.) Фиксируем некоторую вычислимую функцию $g \in \mathcal{P}$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x,y) = \begin{cases} g(y), & \text{если } x \in K, \\ \text{не определено}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Она вычислима программой $u(x,x);\texttt{return}\ g(x)$. Применим свойство главности. Существует тотальная вычислимая функция $s(x)$, для которой $\varphi_{s(x)}(y) = \psi(x,y)$. Тогда

$$x \in K \Rightarrow (\varphi_{s(x)} = g) \Rightarrow s(x) \in I_{\mathcal{P}},$$

$$x \notin K \Rightarrow (\varphi_{s(x)} = \zeta) \Rightarrow s(x) \notin I_{\mathcal{P}}.$$

Отсюда характеристическая функция множества K представляется в виде композиции $\chi_K = \chi_{I_{\mathcal{P}}} \circ s$, т.е. предположение о разрешимости $I_{\mathcal{P}}$ влечет разрешимость K. Последнее неверно, поэтому $I_{\mathcal{P}}$ неразрешимо.

Ч.т.д.

Следствие. Следующие множества не являются разрешимыми:

- $\{n \mid \varphi_n$ — тотальная$\}$,
- $\{n \mid \varphi_n = f\}$ для любой фиксированной вычислимой функции f,
- $\{n \mid \varphi_n(25) = 38\}$,
- $\{n \mid \varphi_n(0)$ определено$\}$,
- $\{n \mid \varphi_n(0)$ не определено$\}$.

Следствие. Следующие множества не являются перечислимыми:

- $\{n \mid \varphi_n(0)$ не определено$\}$,
- $\{n \mid \varphi_n$ нигде не определена$\}$,
- $\{n \mid \varphi_n$ не имеет неподвижных точек$\}$.

Их дополнения перечислимы, а сами они не могут быть разрешимыми по теореме Успенского-Райса. Поэтому (по теореме Поста) они не являются перечислимыми.