Занятие 6

Логическое и дедуктивное следования в логике предикатов. Для упрощения определений будем предполагать, что индивидные переменные (Var) разделены на два непересекающихся списка : $a, b, c, \ldots$ (свободные переменные, параметры) и $x, y, z, \ldots$ (связанные переменные). При этом в определении синтаксиса языков первого порядка термы строятся только с использованием свободных переменных, а пункт про кванторы модифицируется так:

если φ – формула, а свободная переменная a не находится в области действия квантора по x, то $(\forall x\, \varphi[x/a])$ и $(\exists x\, \varphi[x/a])$ также являются формулами. (Выражение $[x/a]$ означает синтаксическую подстановку, т.е. замену буквы a н букву x; она действует на формулу φ, после чего добавляется кванторная приставка.)

Пусть Γ – множество *замкнутых* формул, F – *замкнутая* формула языка первого порядка.

Определение. Формула F *логически следует* из множества Γ (обозначение $\Gamma \models F$), если для каждой интерпретации, обращающей все формулы из Γ в истину, формула F также оказывается истинной.

Определение. Формула F *дедуктивно следует* или *выводима* из множеств Γ (обозначение $\Gamma \vdash F$) если у нее существует *формальный вывод* из гипотез Γ (определение см. предыдущее занятие).

Теорема о корректности и полноте исчисления предикатов утверждает эквивалентность этих понятий: $(\Gamma \models F) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma \vdash F)$.

Теорема о дедукции для исчисления предикатов справедлива, когда все формулы из Γ, A замкнуты: $(\Gamma,\, A \vdash B) \quad \Rightarrow \quad (\Gamma \vdash A \to B)$.

1. Доказать выводимость формулы
   $\forall y(P(y) \to Q(y)) \to (\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x))$.

   Решение: по Теореме о дедукции все сводится к доказательству $\forall x(P(x) \to Q(x)),\, \forall x\, P(x) \vdash \forall x\, Q(x)$ (из д.з.).

$\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash P(a) \to Q(a)$	(вывод: акс., гип., MP)
$\forall x\, P(x) \to P(a)$	(акс.)
$(\forall x\, P(x) \to P(a)) \to (\,(P(a) \to Q(a)) \to (\forall x\, P(x) \to Q(a))\,)$	(акс.)
$\forall x\, P(x) \to Q(a)$	(MP дважды)
$\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$	(B1)
$\forall x\, P(x)$	(гип.)
$\forall x\, Q(x)$	(MP)

Но все это можно упростить, используя подходящие допустимые правила! (Правило допустимо, если из справедливости посылок следует справедливость заключения.) Список полезных допустимых правил приведен в задачах 3, 8. С их помощью доказательство можно сократить так: пусть $\Gamma = \{\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \forall x\, P(x)\}$.

$\Gamma \vdash P(a) \to Q(a)$	(доп. (б), посылка выводима)
$\Gamma \vdash P(a)$	(доп. (б), посылка выводима)
$\Gamma \vdash Q(a)$	(MP)
$\Gamma \vdash \forall x\, Q(x)$	(доп. (а))

Полезно также использовать правила, порождаемые тавтологиями логики высказываний, например, законами контрапозиции ($(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ и др.)

2. С помощью законов контрапозиции доказать выводимость следующих формул: $\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x\, P(x)$, $\qquad \neg \exists x\, P(x) \to \forall x \neg P(x)$.

$\forall x \neg P(x) \to \neg P(a)$	(акс.)
$P(a) \to \neg \forall x \neg P(x)$	(контрапозиция, MP)
$\exists x\, P(x) \to \neg \forall x \neg P(x)$	(B2)
$\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x\, P(x)$	(контрапозиция, MP)

3. Доказать допустимость следующих правил вывода :

   а) “*правило введения* $\forall$”: $\dfrac{\Gamma \vdash A(c)}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, c — константа , не входящая в формулы из Γ, или свободная переменная;

   б) “*правило удаления* $\forall$”: $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;

   Докажем допустимость правила а). Пусть $\ldots, A(c)$ — вывод формулы $A(c)$ из Γ. Очевидно, что если в этом выводе константу c заменить на свободную переменную, то снова получится вывод из

Γ. Будем считать, что так и сделано, т.е. что c — свободная переменная. Пусть B — какая-нибудь фиксированная замкнутая аксиома исчисления предикатов. Продолжим данный вывод из Γ формулы $A(c)$ следующим образом:

...

i) $A(c)$

i+1) B (аксиома)

i+2) $A(c) \to (B \to A(c))$ (аксиома)

i+3) $B \to A(c)$ (из i) и i+2) по правилу MP)

i+4) $B \to \forall v\, A(x)$ (из i+3) по правилу (B1))

i+5) $\forall x\, A(x)$ (из i+1) и i+4) по правилу MP).
Получили вывод из Γ формулы $\forall x\, A(x)$, что и требовалось.

Допустимость б) легко следует из соответствующей аксиомы.

Принцип компактности для логики предикатов (если останется время). *Множество замкнутых формул (теория) выполнимо тогда и только тогда , когда каждое его конечное подмножество выполнимо.* (Он справедлив также и для теорий с равенством и легко следует из теоремы о полноте.)

4. Доказать принцип компактности.

5. Пусть T — теория первого порядка в языке с равенством, K — класс всех ее нормальных моделей (т.е. равенство интерпретируется стандартно).

   - Найти систему аксиом, нормальные модели которой — в точности все бесконечные модели из K.
   - Доказать, что если в классе K имеются модели сколь угодно большой конечной мощности, то в K имеется бесконечная модель.

Домашнее задание

6. Доказать выводимость формулы (без теоремы полноты)
   $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x(Q(x) \to R(x)) \to \forall x(P(x) \to R(x)))$.

7. Доказать выводимость следующих формул (без теоремы полноты): $\neg\forall x P(x) \to \exists x\, \neg P(x), \quad \exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x P(x)$.

8. Доказать допустимость правила в) и разобрать доказательство допустимости правила г).

   в) "*правило введения* $\exists$": $\dfrac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;

   г) "*правило удаления* $\exists$": $\dfrac{\Gamma,\, A(c) \vdash B}{\Gamma,\, \exists x\, A(x) \vdash B}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, B — замкнутая формула, c — константа, не входящая в формулы из Γ и формулу B.

   Докажем допустимость правила г). Для простоты разберем случай, когда формула $A(c)$ — замкнутая. Пусть Γ, $A(c) \vdash B$. По теореме о дедукции $\Gamma \vdash A(c) \to B$. Если в выводе формулы $A(c) \to B$ из Γ константу c заменить на свободную переменную a, то получится вывод из Γ формулы $A(a) \to B$. Применяя правило (B2), получим вывод из Γ формулы $\exists x\, A(x) \to B$. Продолжим этот вывод до вывода из $\Gamma, \exists x\, A(x)$ формулы B:

   ...

   i) $\exists x\, A(x) \to B$

   i+1) $\exists x\, A(x)$ (гипотеза)

   i+2) B (из i) и i+1) по правилу MP).

9. Написать систему аксиом в языке теории групп, нормальные модели которой суть

   - все группы порядка 6,
   - все бесконечные группы.

10. Доказать, что не существует системы аксиом в языке теории групп, нормальными моделями которой были бы в точности все конечные группы.