Занятие 5

Логика предикатов первого порядка (ЛП) Синтаксис языка первого порядка сигнатуры $\sigma = \langle Cnst,\, Fn,\, Pr \rangle$ обсуждался на предыдущем занятии.

Семантика. Выбираем множество $M \neq \emptyset$ (носитель) и интерпретацию I сигнатуры σ в M:

$$c \in Cnst \ \mapsto \ \overline{c} \in M, \quad f^n \in Fn \ \mapsto \ \overline{f}\colon M^n \to M, \quad P^n \in Pr \ \mapsto \ \overline{P} \subseteq M^n.$$

(Предикат $\overline{P} : M^n \to \{0,1\}$ отождествлен с его областью истинности $\overline{P} \subseteq M^n$.)

Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве M. Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).

Пример. $\varphi = \forall x_0 \exists x_1 (P_3^2(x_0, x_1) \wedge P_0^1(x_1))$ (удобнее $\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(y))$).

> $M := N$, $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$, $\overline{Q} := \{x \mid x$ простое число$\}$. Тогда φ выражает факт бесконечности множества простых чисел, поэтому $I \models \varphi$.
>
> Изменим интерпретацию $\overline{P} := \{\langle x, y\rangle \mid x > y\}$. Тогда φ выражает ложное высказывание об отсутствии наименьшего простого числа, поэтому $I \not\models \varphi$.

Истинность/ложность незамкнутых формул $\varphi(\bar{x})$ в интерпретации I зависит от выбора значений свободных переменных $\bar{x}$. Чтобы фиксировать этот выбор, к интерпретации добавляют оценку свободных переменных $\theta : Var \to M$. Тогда $I, \theta \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow I \models \varphi(\theta(\bar{x}))$. (Все корректно? Подумать, как исправить.)

I. Выполнимость и общезначимость формул ЛП. Замкнутая формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна. Общезначимость означает истинность во всех интерпретациях.

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$\begin{array}{l} \exists x\, P(x,x) \\ \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ \forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ \exists x \forall y \exists z P(x,y,z) \to \forall x \exists y P(x,y,y) \\ \exists y \forall x P(x,y,y) \to \forall x \exists y \forall z P(x,y,z) \end{array}$$

II. Эквивалентность формул в ЛП. Основные эквивалентности:

- Все табличные эквивалентности логики высказываний.
- Вынесение кванторов:

$$Qx\, A(x)\, op\, B \equiv Qx(\, A(x)\, op\, B\,), \qquad Q \in \{\forall, \exists\},\ op \in \{\wedge, \vee\}.$$

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \qquad \neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x).$$

- Переименование кванторов:
  $Qx\, A(x) \equiv Qy\, A(y)$ (y — новая переменная).
- Сокращение кванторов:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)), \quad \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

- Фиктивный квантор: $\forall x A \equiv A, \quad \exists x A \equiv A$.

2. В каждом из четырех примеров вынести кванторы наружу:
   $Q_1 x\, A(x) \to Q_2 x\, B(x)$, где $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$.
3. Сформулировать общий метод вынесения кванторов и применить его к формуле $\neg \forall x \forall y P(x,y) \vee \forall x \exists y Q(x,y)$.

III. Исчисление предикатов (1-го порядка). Предполагается, что для свободных и связанных переменных используются два непересекающихся списка имен: $\{a, b, \ldots\}$ и $\{x, y, \ldots\}$. Аксиомами являются:

- Все частные случаи тавтологий логики высказываний.
- Формулы видов $\forall x\, A(x) \to A(t)$ и $A(t) \to \exists x\, A(x)$, где t – терм.

Правила вывода – *modus ponens* (MP) и два *правила Бернайса* (B1),(B2):

$$\frac{A \to B, A}{B}\ (\mathrm{MP}), \qquad \frac{A \to B(a)}{A \to \forall x B(x)}\ (\mathrm{B1}), \qquad \frac{B(a) \to A}{\exists x B(x) \to A}\ (\mathrm{B2}).$$

В правилах (B1),(B2) свободная переменная a не должна встречаться в формуле A.

Вывод в исчислении предикатов — конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предшествующих формул по одному из правил вывода. Формула A выводима (обозначение: $\vdash A$), если существует вывод, заканчивающийся на формуле A. В случае *вывода из гипотез* (обозначение: $\Gamma \vdash A$) множество гипотез Γ добавляется к аксиомам и переменная a в правилах Бернайса также не должна встречаться в гипотезах.

4. Построить вывод формулы $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$.

$$\begin{array}{ll} \forall x\, P(x) \to P(a) & \text{(аксиома)} \\ \forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y) & \text{(B1)} \end{array}$$

5. Построить вывод формулы $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall x P(x,x)$.

$$\begin{array}{ll} \forall x\forall y P(x,y) \to \forall y P(a,x) & \text{(аксиома)} \\ \forall y P(a,x) \to P(a,a) & \text{(аксиома)} \\ (\forall x\forall y P(x,y) \to \forall y P(a,x)) \to & \\ \quad (\ (\forall y P(a,x) \to P(a,a)) \to & \\ \qquad (\forall x\forall y P(x,y) \to P(a,a))\ ) & \text{(аксиома)} \\ \forall x\forall y P(x,y) \to P(a,a) & \text{(MP)}\times 2 \\ \forall x\forall y P(x,y) \to \forall x P(x,x) & \text{(B1)} \end{array}$$

6. Построить вывод формулы $\exists y\, Q(y)$ из гипотез $\forall y(P(y) \to Q(y))$, $\exists z\, P(z)$.

1) $\forall y(P(y) \to Q(y))$ (гипотеза)

2) $\exists z\, P(z)$ (гипотеза)

3) $\forall y(P(y) \to Q(y)) \to (P(a) \to Q(a))$ (акс.)

4) $P(a) \to Q(a)$ (из 1) и 3) по правилу MP)

5) $Q(a) \to \exists y\, Q(y)$ (акс.)

6) $(P(a) \to Q(a)) \to (\,(Q(a) \to \exists y\, Q(y)) \to (P(a) \to \exists y\, Q(y))\,)$ (акс.)

7) $(P(a) \to \exists y\, Q(y))$ (из 4),5),6) по правилу MP дважды)

8) $\exists z\, P(z) \to \exists y\, Q(y)$ (из 7) по правилу (B2))

9) $\exists y\, Q(y)$ (получено из 2) и 8) по правилу MP)

Домашнее задание

7. Доделать предыдущее домашнее задание (про невыразимость).

8. Доделать задачу 1.

9. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:
$\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \forall x \forall y \forall z(\neg Q(x,x) \wedge (Q(x,y) \to (Q(y,z) \to Q(x,z))))$.

10. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:
$\forall x \forall y \forall z(R(x,x) \wedge (R(x,z) \to R(x,y) \vee R(y,z))) \to \exists x \forall y R(x,y)$.

11. Уметь доказывать основные эквивалентности. Почему формул вынесения кванторов 4, а сокращения кванторов — только 2 ?

12. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

    1) $\forall x \forall y(P(x) \to Q(y))$ 2) $\forall x \exists y(P(x) \to Q(y))$ 3) $\exists y \forall x(P(x) \to Q(y))$

    4) $\forall y \exists x(P(x) \to Q(y))$ 5) $\exists x \forall y(P(x) \to Q(y))$ 6) $\exists x \exists y(P(x) \to Q(y))$

13. Вынести кванторы наружу:
$$\forall x \neg \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y),$$
$$\forall x \exists y P(x,y) \to \forall x \exists y Q(x,y).$$

14. Построить вывод формулы $\exists x P(x) \to \exists y P(y)$.

15. Построить вывод формулы $\forall x\, Q(x)$ из множества гипотез
$\Gamma = \{\forall y(P(y) \to Q(y)),\ \forall z\, P(z)\}$.