

Занятие 4

Сигнатура $\sigma = \langle Cnst, Fn, Pr \rangle$ — это фиксированный набор констант, функциональных символов и предикатных символов. Она определяет язык первого порядка (элементарный язык) сигнатуры σ . Синтаксис языка содержит определения правильно построенных выражений двух сортов — термов и формул.

Фиксируем множество $Var = \{x_0, x_1, \dots\}$ *индивидуальных* переменных (мыслятся пробегающими одно и то же множество значений).

Термы (Tm).

- $Cnst \cup Var \subseteq Tm$
- Если $t_1, \dots, t_n \in Tm$, $f \in Fn$, $arity(f) = n$, то $f(t_1, \dots, t_n) \in Tm$.

Формулы (Fm).

- Если $t_1, \dots, t_n \in Tm$, $P \in Pr$, $arity(P) = n$, то $P(t_1, \dots, t_n) \in Fm$.
- Если $\varphi, \psi \in Fm$, то $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in Fm$.
- Если $\varphi \in Fm$, $x \in Var$, то $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi) \in Fm$. В этих случаях φ считается *областью действия* квантора, а все вхождения переменной x в φ (если они есть) объявляются *связанными*.

Переменные, которые имеют несвязанное вхождение в формулу, называются *свободными* переменными формулы (или ее параметрами). Формула без свободных переменных называется *замкнутой*.

Семантика. Фиксируем интерпретацию I сигнатуры в некоторой математической структуре (модели языка). Переменные пробегают носитель структуры, константы обозначают конкретные (выделенные) элементы носителя, функциональные символы — конкретные (выделенные) операции на носителе, а предикатные символы — конкретные (выделенные) предикаты на носителе структуры. Замкнутые формулы получают однозначно определенное истинностное значение — 0 или 1.

Получаем язык для описания свойств этой структуры.

1. Сигнатура содержит двухместные $=^2, \in^2, \perp^2$. Констант нет. Носитель интерпретации M — все точки и прямые на плоскости. Предикатные символы интерпретируются равенством, принадлежностью

(точка лежит на прямой) и перпендикулярностью (прямых). Выразить:

- (a) “ x — точка”, “ x — прямая”.
 - (b) “Прямые x и y параллельны”.
 - (c) “ x, y, z — вершины (невырожденного) треугольника”.
 - (d) “Высоты каждого треугольника пересекаются в одной точке”.
 - (e) “Точки x, y, z, t являются последовательными вершинами параллелограмма”.
 - (f) “Точка z делит отрезок x, y пополам”.
2. Язык арифметики. На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) = 1 \iff x+y = z$, $P(x, y, z) = 1 \iff x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

- (a) формулы с одной свободной переменной a , истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;
- (b) формулы с двумя свободными переменными a и b , истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leq b$, a делит b ;
- (c) формулы с тремя свободными переменными a, b и c , истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c , a — наибольший общий делитель чисел b и c .

β -функция Гёделя. В стандартной интерпретации (см. задачу 2) языка арифметики выразим график β -функции Гёделя. Эта такая функция, что для каждой конечной последовательности натуральных чисел a_1, \dots, a_n существуют x, y такие, что

$$\beta(x, y, 0) = n, \quad \beta(x, y, 1) = a_1, \quad \dots, \quad \beta(x, y, n) = a_n.$$

3. Доказать выразимость в стандартной интерпретации языка арифметики условия “ $y = 2^x$ ”.

Техника доказательства невыразимости. Если отношение не сохраняется при некотором автоморфизме модели, то оно невыразимо. (Аutomорфизм — это биекция носителя на себя, сохраняющая все сигнатурные операции, отношения и константы.) Выразимы ли следующие отношения?

4. $a = b, b = a + 1, c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$.

5. $a = 0, a = b, a < b$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.

6. $a = b, a = 1, a = 3$ в $(\mathbf{N}, a : b)$ где $a : b \Leftrightarrow \exists k(a = k \cdot b)$, т.е. $0 : 0$.

Домашнее задание

7. Доделать задачи 1 и 2.

8. Пусть график функции $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ выразим в стандартной интерпретации языка арифметики. Доказать выразимость графика функции g , определенной рекурсией: $g(0) = a, \quad g(n+1) = f(n, g(n))$.

9. Выразимы ли следующие отношения?

(a) $a = b, |a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

(b) $a < b, a = 0, a = 1, a = 2$ в $(\mathbf{N}, a + b = c)$.

(c) “ a — простое число” в $(\mathbf{N}, a : b)$.

(d) $a = 1, a = 2$ в $(\mathbf{Z}, a + b = c)$.

(e) $a = 0$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$.

(f) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$.

(g) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$.

(h) $|a - b| = 3$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.