Занятие 2

Упорядоченные множества. Определения строгого и нестрого частичного порядка, изоморфизм порядков, линейные порядки, сумма и произведение порядков, вполне упорядоченные множества.

1. Нарисовать порядок $(\mathcal{P}(X), \subset)$ и стандартные конечные линейные порядки $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$. Доказать: $(\mathcal{P}(X), \subset) \cong (\mathcal{P}(X), \supset)$. Заметить, что $\mathbf{1} + \mathbf{2} \cong \mathbf{3}$, а $\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cong \mathbf{4}$.

2. Стандартные порядки на $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$. Описать их попарные суммы и произведения. Исследовать вопрос о возможности вложить эти суммы и произведения в один из исходных порядков. (Вложение – изоморфизн на подмножество.) Часть задачи – на дом.

3. Доказать, что каждый счетный линейный порядок можно вложить в $\mathbf{Q}$.

4. Какие из перечисленный выше линейных порядков являются вполне упорядочениями?

5. Доказать, что сумма и произведение вполне упорядоченных множеств вполне упорядочены, а также каждый начальный отрезок вполне упорядоченного множества вполне упорядочен.

6. Стандартный линейный порядок на $\mathbf{N}$ обозначают ω. Доказать, что если вполне упорядоченное множество бесконечно и имеет наибольший элемент, то оно имеет начальный отрезок, изоморфный ω.

7. (Возможно, было на лекции.) Если $(X, <)$ – вполне упорядоченное множество, а отображение $f : X \to X$ сохраняет порядок, то $f(x) \geq x$ для всех $x \in X$. Вывести отсюда, что существует единственный автоморфизм вполне упорядоченного множества – тождественный.

Домашнее задание

8. Всегда ли частичные порядки $(X, <)$ и $(X, >)$ изоморфны?

9. Ассоциативны ли (с точностью до $\cong$) операции сложения и умножения линейных порядков?

10. Доказать, что линейно упорядоченные множества $\mathbf{Q}+\mathbf{1}$ и $\mathbf{Q}$ не изоморфны.

11. Доказать, что линейно упорядоченные множества $\mathbf{Q}+\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$ не изоморфны.

12. Доделать задачу 2.

13. Доказать, что каждый плотный счетный линейный порядок без первого и последнего элемента изоморфен $\mathbf{Q}$. Порядок плотен, если $\forall x, y(x < y \to \exists z(x < z < y))$.

14. Доказать, что всякое частично упорядоченное множество $(X, <)$ можно вложить в $(\mathcal{P}(X), \subset)$.

15. Описать все автоморфизмы упорядоченного множества $(\mathbf{Z}, <)$.

16. Доказать, что для линейно упорядоченного множества условие вполне упорядоченности эквивалентно отсутствию бесконечных убывающих цепей $x_1 > x_2 > \ldots$.

17. Пусть $(X, <)$ – вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех (включая пустую) конечных невозрастающих последовательностей $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, составленных из элементов X. На $\Omega(X)$ зададим лексикографический линейный порядок: $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle < \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$, если для некоторого $k \leq \min(n, m)$ при $i < k$ выполнено $x_i = y_i$ и $x_k < y_k$, либо $x_i = y_i$ при всех $i \leq n$ и $n < m$. Доказать, что $(\Omega(X), <)$ – вполне упорядоченное множество. (Так определяется операция возведение в степень.)