Занятие 1

Идея наивной теории множеств: все объекты и понятия в математике определяются в терминах множеств и принадлежности ($\in$).
Объемность: множества равны т. и т.т., когда они состоят из одних и тех же элементов.

Основной вопрос — какие они бывают, как и из чего они строятся? Два способа задавать множества — перечислением элементов $\{a, b, c\}$ и указанием принципа отбора элементов $\{x \mid Q(x)\}$. Оба способа чреваты проблемами: перечисление — когда множество бесконечно и используется многоточие $\{0, 1, 3, \ldots\}$, а указание принципа — парадокс Рассела $\{x \mid x \notin x\}$. Для того, чтобы избежать известные парадоксы применяют более слабую форму выделения $\{x \in A \mid Q(x)\}$, а когда ее все-таки не хватает, напр., для определения объединения множеств, изучают специальный случай отдельно. (Но гарантии избежать все парадоксы нет.)

1. Перечисление элементов, булевы операции, бесконечные объединения и пересечения, $\mathcal{P}(A)$. Все определения в терминах $\in$ (и логики).

1. Сколько элементов в множествах $\{0, 1, \{0\}, \{1\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$?
2. Известно, что $\bigcup A \subseteq A$. Сколько элементов может быть в A — 0, 1, 2, 3, ..., может ли A быть счетным?
3. А что такое 0,1,2,3,... выше? Предлагается такое кодирование: $0 = \emptyset$, $n + 1 = n \cup \{n\}$. Вычислить 0,1,2,3.
4. Разные последовательности операций могут приводить к одному и тому же результату. Как это замечать, т.е. как доказывать тождества? Надо доказывать, что обе части равенства обозначают множества, содержащие одни и те же элементы. Например, выяснить, будет ли операция $\cap$ дистрибутивной относительно $\cup$ и $\setminus$? А относительно себя ? Аналогичные вопросы для $\cup$, для $\setminus$?

2. Но имеются и другие математические объекты, множественное представление которых не так очевидно: векторы, функции, свойства, отношения и т.д. Оказывается, что ключевым моментом здесь является представление упорядоченных пар множеств: $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

5. $\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$. Сколько элементов в упорядоченной тройке?

6. Доказать свойство: $\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A,\ y \in B\}$ $\qquad A \times B \times C = (A \times B) \times C$
Каждое $R \subseteq A^n$ называется n-местным отношением на множестве A.
Обобщение — отношения $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$; $n = 1$ — свойства, $n = 2$ — бинарные отношения (обозначение $xRy := \langle x, y\rangle \in R$).

Функция $f : A^n \to B$ есть отношение $f \subseteq A^n \times B$, удовлетворяющее условию функциональности: $\langle \bar{x}, y\rangle, \langle \bar{x}, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$.
Обозначение: $f(\bar{x}) :=$ тот y, для которого $\langle \bar{x}, y\rangle \in f$.
Инъекция, сюръекция, биекция (изоморфизм множеств, равномощность).

7. Вспоминаем: $\mathbf{N}$ равномощен $\mathbf{N}^2$, но не равномощен отрезку [0,1].

8. Теорема Кантора: $\mathcal{P}(A)$ не равномощно A.
(Если $f : A \to \mathcal{P}(A)$ биекция, то рассмотрим такое a, что $f(a) = \{x \mid x \notin f(x)\}$. Тогда $a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin f(a)$. Противоречие.)

Домашнее задание

9. Выяснить вопросы про дистрибутивность из п. 4.

10. Композиция одноместных функций — функция; композиция сохраняет инъективность и сюръективность.

11. Композиция $R_1 \circ R_2$ отношений $R_1, R_2 \subseteq A^2$ определяется как отношение $\{\langle x, z\rangle \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, z\rangle \in R_2)\}$. Ассоциативна ли эта операция? Вычислить всевозможные попарные композиции отношений $=, \neq, <, >, \leq, \geq$ (на действительной прямой).

12. Каждое ограниченное (т.е. конечное) подмножество натуральных чисел равномощно некоторому начальному отрезку натурального ряда. (Индукция по n, для которого $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$.)

13. Каждое подмножество натурального ряда равномощно ему или его начальному отрезку. Разбор двух случаев: A ограничено или нет. С помощью этого аккуратно установить счетность множества $\mathbf{Q}^+$ (нужна счетность бесконечного подмножества $\mathbf{N}^2$, состоящего из несократимых пар натуральных чисел).

14. Понятия рефлексивности ($\forall x \in A(xRx)$), симметричности ($\forall x, y \in A\,(xRy \to yRx)$) и транзитивности ($\forall x, y, z \in A\,(xRy \wedge yRz \to xRz)$) отношения $R \subseteq A^2$. Все вместе — отношение эквивалентности. Привести примеры:

    1) рефлексивного, транзитивного, но не симметричного отношения на множестве из 2-х элементов, из 3-х;

    2) нетранзитивного отношения на множестве из 2-х элементов;

    3) транзитивного, симметричного, но не рефлексивного отношения на множестве из 2-х элементов.

15. Отношение $R \subseteq A^2$ называется линейным порядком, если оно рефлексивно, транзитивно, антисимметрично ($\forall x, y \in A\,(xRy \wedge yRx \to x = y)$) и линейно ($\forall x, y \in A\,(xRy \vee yRx)$). Для $\subseteq$ первые три свойства очевидны, т.е. это частичный порядок на любом семействе множеств. Установить, что $\subseteq$ на множестве всех натуральных чисел — линейный порядок. Разобрать доказательство:

    Как доказывать линейность? Нужен метод — принцип индукции. Индукцией по n установим $\forall x \in \mathbf{N}(x \subseteq n \vee n \subseteq x)$. Базис ($n = 0$) очевиден. Шаг: пусть для n верно $\forall x \in \mathbf{N}(x \subseteq n \vee n \subseteq x)$. Возьмем $x \in \mathbf{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} x \subseteq n \ \Rightarrow \ x \subseteq n \cup \{n\} \ \Rightarrow \ x \subseteq n' \\ n \subseteq x, n' \not\subseteq x \ \Rightarrow \ x = n \ \Rightarrow \ x \subseteq n' \end{array}\right\} \Rightarrow x \subseteq n' \vee n' \subseteq x.$$