Интуиционистская логика

В. Е. Плиско

17 декабря 2021 г.

Интуиционистское исчисление предикатов

Интуиционистское исчисление предикатов (ИИП) в сигнатуре Ω, содержащей лишь константы и предикатные символы. задается следующими схемами аксиом:

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
3. $A \wedge B \to A$; 4. $A \wedge B \to B$;
5. $A \to (B \to A \wedge B)$;
6. $A \to A \vee B$; 7. $B \to A \vee B$;
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$; 10. $A \to (\neg A \to B)$;
11. $\forall v\, A(v) \to A(t)$; 12. $A(t) \to \exists v\, A(v)$.

В схемах 11 и 12 $A(v)$ — формула языка Ω, v — переменная, t — терм, свободный для v в $A(v)$.

Правила вывода ИИП:

(I) $\dfrac{A, A \to B}{B}$ (modus ponens; MP);

(II) $\dfrac{A \to B}{\exists v\, A \to B}$ (удаление квантора существования);

(III) $\dfrac{B \to A}{B \to \forall v\, A}$ (введение квантора всеобщности).

В правилах (II) и (III) B не содержит свободных вхождений v.

Задача. Доказать, что следующие формулы выводимы в ИИП:

1. $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$;

2. $\exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x\, P(x)$;

3. $\exists x\, (P \to Q(x)) \to (P \to \exists x\, Q(x))$.

Модели Крипке для логики предикатов

Модель Крипке для языка Ω имеет вид $\mathcal{K} = (K, \preceq, D, \Vdash)$, где

$(K, \preceq)$ — частично упорядоченное множество (шкала Крипке),

D — функция, каждому $\alpha \in K$ сопоставляющая непустое множество D_α, причем $D_\alpha \subseteq D_\beta$, если $\alpha \preceq \beta$.

Если Ω содержит константу c, то ей сопоставляется объект $\bar{c}$, который принадлежит любому множеству D_α для $\alpha \in K$. В дальнейшем c отождествляется с элементом $\bar{c}$.

$\Vdash$ — некоторое соответствие между множеством K и множеством всех атомов вида $P(a_1, \ldots, a_n)$, где P есть (n-местный) предикатный символ сигнатуры Ω, а $a_1, \ldots, a_n \in \bigcup\limits_{\alpha \in K} D_\alpha$, обладающее тем свойством, что если $\alpha \in K$, $P(a_1, \ldots, a_n)$ — атом указанного вида, и $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$, то $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq D_\alpha$, и если $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$. Соответствие $\Vdash$ называется оценкой атомов в данной модели Крипке. Как и в случае моделей Крипке для логики высказываний, $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$ читается «α вынуждает $P(a_1, \ldots, a_n)$» или «$P(a_1, \ldots, a_n)$ истинно в момент α».

Интуитивный смысл моделей Крипке для логики предикатов аналогичен смыслу моделей Крипке для логики высказываний. Элементы множества K можно трактовать как моменты времени. Множество D_α можно понимать как множество объектов, построенных к моменту α или доступных для исследования в этот момент. Условие

$$\alpha \preceq \beta \Rightarrow D_\alpha \subseteq D_\beta$$

означает, что имеющиеся в данный момент объекты в будущем не исчезают. Интуитивно $\alpha \Vdash P(a_1, \ldots, a_n)$ означает, что к моменту α доказано утверждение $P(a_1, \ldots, a_n)$, причем доказанные утверждения остаются таковыми и в будущем, так что имеет место принцип сохранения истинности.

Соответствие $\Vdash$ между K и множеством атомов расширяется до соответствия $\Vdash$ между K и множеством высказываний следующим образом. Пусть $\alpha \in K$, а A — высказывание сигнатуры Ω, расширенной за счет констант для обозначения всех элементов D_α. Соответствие $\alpha \Vdash A$ задается индукцией по логической длине A. Для атомов оно уже определено. Далее полагаем:

$\alpha \Vdash (A \wedge B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A$ и $\alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \vee B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A$ или $\alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \to B) \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\,[\beta \nVdash A$ или $\beta \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash \neg A \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\, \beta \nVdash A$;

$\alpha \Vdash \exists v\, A(v) \rightleftharpoons (\exists a \in D_\alpha)\, \alpha \Vdash A(a)$;

$\alpha \Vdash \forall v\, A(v) \rightleftharpoons (\forall \beta \succeq \alpha)\,(\forall a \in D_\beta)\, \beta \Vdash A(a)$.

Здесь $\beta \succeq \alpha$ означает $\alpha \preceq \beta$, а $A(a)$ есть результат подстановки константы a вместо переменной v в формулу $A(v)$.

Говорят, что формула A истинна в модели $\mathcal{K} = (K, \preceq, D, \Vdash)$, и пишут $\mathcal{K} \models A$, если для любого $\alpha \in K$ имеет место $\alpha \Vdash A$. Если формула A не истинна в модели Крипке $\mathcal{K}$, т. е. $\mathcal{K} \not\models A$, то $\mathcal{K}$ называют контромоделью для A.

Имеет место следующая теорема о корректности ИИП относительно моделей Крипке:
Теорема 1. *Если замкнутая формула языка Ω выводима в ИИП, то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω.*

Эта теорема позволяет доказывать невыводимость в ИИП тех или иных формул путем построения для них контрмоделей Крипке.

Пример. Докажем, что формула $\neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$ не выводится в ИИП, построив контрмодель для этой формулы. Положим $K = \mathbb{N}$, причем $m \preceq n \rightleftharpoons m \leq n$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть $D_n = \{0, \ldots, n\}$. Положим $m \Vdash P(n) \rightleftharpoons m > n$. Допустим, что

$$0 \Vdash \neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)). \tag{1}$$

В силу определения отношения $\Vdash$ для отрицания (1) означает, что

$$(\forall m \in \mathbb{N})\, m \nVdash \neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)).$$

В частности, $0 \nVdash \neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$. Это означает, что

$$m \Vdash \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Отсюда и из определения соответствия $\Vdash$ для квантора всеобщности следует $m \Vdash P(m) \vee \neg P(m)$, так как $m \in D_m$. В силу определения отношения $\Vdash$ для дизъюнкции это означает, что либо 1) $m \Vdash P(m)$, либо 2) $m \Vdash \neg P(m)$. Однако ни то, ни другое не имеет места. Действительно, условие 1) не выполняется в силу определения отношения $\Vdash$ для атомов. Докажем, что условие 2) также не выполняется. Допустим противное, т. е. $m \Vdash \neg P(m)$. В силу определения отношения $\Vdash$ для отрицания это означает, что $(\forall n \geq m)\, n \nVdash P(m)$. Но это не так, ибо $m+1 \Vdash P(m)$. Таким образом, предположение, что $0 \Vdash \neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$, приводит к противоречию. Значит,

$$0 \nVdash \neg\neg\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)),$$

и построенная модель Крипке является контрмоделью для рассматриваемой формулы.

Имеет место теорема о полноте ИИП относительно моделей Крипке.

Теорема 2. *Если замкнутая формула A невыводима в ИИП, то существует контрмодель Крипке для A.*

Задача. Построить контрмодели для следующих формул:

1. $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$;

2. $(P \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (P \to Q(x))$;

3. $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x)) \wedge \neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$.

О конструктивной логике

Неформальная интуиционистская семантика логических операций не является математически точной. Модели Крипке адекватны формальным логическим системам, называемым интуиционистскими, но в них не нашлось истолкование «общего метода», используемого в интуиционистской трактовке импликации и квантора всеобщности. Это понятие удается уточнить в рамках теории алгоритмов. Впервые истолкование интуиционистской семантики на основе теории вычислимых функций было предложено американским математиком Клини для арифметических утверждений, т. е. замкнутых формул языка арифметики с сигнатурой $\{0,', +, \cdot, =\}$. Основная его идея состояла в следующем.

Не уточняя понятие «доказательства», можно считать, что доказательства кодируются натуральными числами. Далее, под «общим методом» можно понимать вычислимую функцию. Вычислимые функции также нумеруются натуральными числами. Так мы приходим к понятию *рекурсивной реализуемости*. Отношение $e \mathrel{\mathsf{r}} \Phi$, где $e \in \mathbb{N}$, Φ — арифметическое высказывание, определяется индукцией по числу логических символов в высказывании Φ.

Если в Φ нет логических символов, т. е. Φ — атомарное высказывание, то считается, что $e \mathrel{\mathsf{r}} \Phi$ тогда и только тогда, когда $e = 0$ и высказывание Φ истинно.

Если Φ есть высказывание $\Psi_0 \mathbin{\&} \Psi_1$, то $e \mathrel{\mathsf{r}} \Phi$ тогда и только тогда, когда число e имеет вид $2^{e_0} \cdot 3^{e_1}$ и при этом $e_0 \mathrel{\mathsf{r}} \Psi_0$, $e_1 \mathrel{\mathsf{r}} \Psi_1$.

Если Φ есть высказывание $\Psi_0 \vee \Psi_1$, то $e \, \mathsf{r} \, \Phi$ тогда и только тогда, когда число e имеет вид $2^0 \cdot 3^{e_0}$ и при этом $e_0 \, \mathsf{r} \, \Psi_0$, либо число e имеет вид $2^1 \cdot 3^{e_1}$ и при этом $e_1 \, \mathsf{r} \, \Psi_1$.

Если Φ есть высказывание $\Psi_0 \to \Psi_1$, то $e \, \mathsf{r} \, \Phi$ тогда и только тогда, когда число e является номером вычислимой функции, которая всякое натуральное число e_0 такое, что $e_0 \, \mathsf{r} \, \Psi_0$, переводит в натуральное число e_1 такое, что $e_1 \, \mathsf{r} \, \Psi_1$.

Если Φ есть высказывание $\neg\Psi$, то $e \, \mathsf{r} \, \Phi$ тогда и только тогда, когда $e \, \mathsf{r} \, (\Psi \to 0 = 1)$.

Если Φ есть высказывание $\exists x \, \Psi(x)$, то $e \, \mathsf{r} \, \Phi$ тогда и только тогда, когда число e имеет вид $2^n \cdot 3^a$ и при этом $a \, \mathsf{r} \, \Psi(\bar{n})$.

Если Φ есть высказывание $\forall x \, \Psi(x)$, то $e \, \mathsf{r} \, \Phi$ тогда и только тогда, когда число e является номером общерекурсивной функции, которая всякое натуральное число n переводит в такое натуральное число a, что $a \, \mathsf{r} \, \Psi(\bar{n})$.

Если имеет место $e \,\mathsf{r}\, \Phi$, то говорят, что натуральное число e *реализует* высказыванние Φ. Арифметическое высказывание Φ называется *реализуемым*, если существует натуральное число e, релизующее это высказывание, т. е. $e \,\mathsf{r}\, \Phi$.

Рекурсивная реализуемость служит уточнением интуиционистской семантики языка арифметики. Именно такая семантика лежит в основе *конструктивной математики*, разрабатывавшейся А. А. Марковым и его школой. Вообще, под *конструктивной семантикой* обычно понимают такой вариант интуиционистской семантики, где термин «общий метод» понимается как «алгоритм».

Теорема 3. *Существует такое арифметическое высказывание, которое истинно, но не реализуемо.*

Доказательство. Используя теорему Матиясевича о диофантовости перечислимых множеств, можно написать формулу $\Phi(x)$ вида $\exists\vec{y}\,(t_1(x,\vec{y}) = t_2(x,\vec{y}))$ такую, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $\varphi_n(n) = 1$ тогда и только тогда, когда высказывание $\Phi(\bar{n})$ истинно (а тогда оно и реализуемо). Рассмотрим высказывание $\forall x\,(\Phi(x) \vee \neg\Phi(x))$. Очевидно, что это высказывание истинно. Докажем, что оно нереализуемо.

Допустим, что существует число e, которое реализует высказывание $\forall x\,(\Phi(x) \vee \neg\Phi(x))$. Посредством $(a)_i$ будем обозначать показатель, с которым i-е простое число входит в разложение a на простые множители. Функция $f(x) = (\varphi_e(x))_0$ вычислима и всюду определена, причем принимает только значения 0 и 1. Пусть m — номер функции f, т. е. $f = \varphi_m$. Если $f(m) = 0$, т. е. $\varphi_m(m) = 0$, то высказывание $\neg\Phi(\bar{m})$ реализуемо. Но в таком случае $(\varphi_e(m))_0 = 1$, т. е. $f(m) = 1$. Получили противоречие. С другой стороны, если $f(m) = 1$, т. е. $\varphi_m(m) = 1$, то реализуемо высказывание $\Phi(\bar{m})$, и в этом случае $(\varphi_e(m))_0 = 0$, т. е. $f(m) = 0$, так что снова получается противоречие. $\square$

Предложение 1. *Существует арифметическое высказывание, которое реализуемо, но не является истинным.*

Доказательство. Таково высказывание $\neg\Psi$, где Ψ есть высказывание $\forall x\,(\Phi(x) \vee \neg\Phi(x))$. $\square$

Дополнительные материалы:

1. В.Е.Плиско, В.Х.Хаханян. Интуиционистская логика. М.: Мех.-мат. МГУ, 2009.

2. В.Е.Плиско. Конструктивная логика. Лекции на Малом мехмате:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLFAUjUzyuqi-pF3OaoGioIGWLofTbjUrB

3. В. Е. Плиско. Лекции по конструктивной логике. М.: Луч, 2021.