Интуиционистская логика

В. Е. Плиско

10 декабря 2021 г.

Что такое интуиционизм

Обнаружение парадоксов, т. е. противоречий, в наивной теории множеств Кантора побудило некоторых математиков к поиску причин их возникновения. В 1908 г. появилась работа нидерландского математика Брауэра «Недостоверность логических принципов». В ней отмечалось, что принципы классической логики, дошедшие до нас от Аристотеля, абстрагированы от обращения с конечными совокупностями. Забывая об этом, впоследствии эту логику ошибочно приняли за нечто первичное по отношению к математике и в конце концов стали применять ее без какого-либо оправдания к математике бесконечных множеств. Однако не все принципы, истинные при рассмотрении конечных множеств, переносятся на бесконечные. Например, «Во всяком множестве натуральных чисел имеется наибольшее число».

Принципом классической логики, который Брауэр не принимает для бесконечных множеств, является закон исключенного третьего: «Для любого высказывания Ф, либо Ф, либо не Ф». Пусть Ф есть высказывание «Существует элемент множества D, обладающий свойством P», причем свойство P таково, что для любого элемента из D мы можем определить, обладает ли он свойством P. Тогда «не Ф» эквивалентно утверждению «Каждый элемент из D не обладает свойством P». Если D — конечное множество, то в принципе можно обследовать по очереди все его элементы и либо найти элемент, обладающий свойством P, либо убедиться, что все элементы не обладают свойством P, так что в этом случае справедлив закон исключенного третьего. Если же D бесконечно, то принципиально невозможно закончить исследование всех его элементов.

Для некоторых множеств D и свойств P мы можем найти элемент, обладающий свойством P, или, напротив, доказать посредством математического рассуждения, что каждый элемент множества D не обладает свойством P (как, например, доказывается, что не существует таких натуральных чисел m и n, что $m^2 = 2n^2$). Однако нет никакой уверенности в существовании такого решения вопроса об истинности утверждения Φ в общем случае. Правда, можно было бы считать, что всякая проблема разрешима «в принципе», но это означало бы привлечение философских допущений, что в математике делать не принято.

В отличие от традиционной, классической логики, Брауэр и его последователи развивали другую логику, получившую название *интуиционистской*. Это название обусловлено тем, что в качестве единственного критерия истинности в математике Брауэр провозгласил интуицию. Согласно его концепции, математические объекты рождены человеческой мыслью, поэтому истинность суждений о них полностью определяется представлениями об этих объектах того математика, в сознании которого возникли эти объекты. Строго говоря, с точки зрения интуиционизма, сколько математиков — столько и математик.

Интуиционизм и логика

С точки зрения интуиционизма конструирование математических объектов и рассуждения о них должны подчиняться критерию интуитивной ясности и убедительности. В конкретных математических построениях интуиционизм проявляется прежде всего в отказе от рассмотрения бесконечной совокупности как актуально данной в завершенном виде В интуиционистской математике умозаключения не производятся по заранее установленным правилам, т. е. не фиксируется какая-либо априорная логическая система. Убедительность каждого логического шага должна проверяться непосредственно в соответствии с интуицией.

Несколько иной, чем в традиционной, классической логике, смысл интуиционисты придают исходным логическим понятиям. Так, в традиционной логике высказывание понимается как такое предложение, которое может быть истинным или ложным, так что истинностное значение есть непременный атрибут всякого высказывания. Интуиционистский взгляд на истинность высказывания представляется более трезвым и соответствующим математической практике. С точки зрения интуиционизма истинность высказывания связана с возможностью его *доказательства*. Таким образом, высказывание считается истинным, если имеется его доказательство.

В этом контексте понимаются и традиционные логические операции над высказываниями. Так, высказывание $\Phi \wedge \Psi$ считается истинным тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания Φ и Ψ, т. е. мы располагаем доказательством каждого из этих высказываний. Высказывание $\Phi \vee \Psi$ считается истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний Φ и Ψ, т. е. мы располагаем доказательством высказывания Φ или доказательством высказывания Ψ. Высказывание $\Phi \to \Psi$ считается истинным тогда и только тогда, когда имеется некий общий метод, позволяющий любое доказательство высказывания Φ преобразовать в доказательство высказывания Ψ. Отрицание $\neg\Phi$ высказывания Φ считается истинным, если истинно высказывание $\Phi \to \perp$, где $\perp$ — некоторое заведомо абсурдное высказывание (например, $0 = 1$).

Пусть $\Phi(x)$ — некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать объекты подходящим образом заданного множества. Тогда высказывание $\exists x\, \Phi(x)$ считается истинным, если для некоторого конкретного объекта a из рассматриваемого множества мы имеем доказательство высказывания $\Phi(a)$.

Наконец, высказывание $\forall x\, \Phi(x)$ считается истинным, если имеется общий метод, позволяющий для любого конкретного объекта a из рассматриваемого множества получить доказательство высказывания $\Phi(a)$.

Понятие ложного высказывания не является самостоятельным в интуицонисткой логике: высказывание Φ считается ложным, если нам удалось доказать высказывание $\neg\Phi$.

Таким образом, в отличие от классической логики, где каждое высказывание либо истинно, либо ложно, в интуиционистской логике высказывания подразделяются на три класса: истинные, ложные и все прочие, или *непроверенные*, при этом только принадлежность высказывания к одному из первых двух классов является окончательной, а всякое непроверенное высказывание с течением времени в результате исследовательской деятельности человека может перейти в разряд истинных (если удастся доказать его) или в разряд ложных (если удастся его опровергнуть, т. е. доказать истинность отрицания этого высказывания).

Мы видим, что интуиционистское понимание некоторых видов высказываний существенно отличается от классического. Пусть, например, высказывание имеет вид $\Phi \vee \neg\Phi$. Если Φ — истинное высказывание, например, 0=0, то высказывание $\Phi \vee \neg\Phi$ также истинно. Аналогично, высказывание $\Phi \vee \neg\Phi$ истинно, если Φ — ложное высказывание, например, 0=1. Если же Φ — непроверенное высказывание (такое высказывание нетрудно найти в современной научной литературе, где формулируются нерешенные математические проблемы), то мы не можем утверждать, что высказывание $\Phi \vee \neg\Phi$ истинно. Но с классической точки зрения это высказывание истинно, правда, единственным аргументом здесь является тезис, что такое высказывание «истинно всегда».

Рассмотрим один хрестоматийный пример математического доказательства, которое неприемлемо с интуиционистской точки зрения.

Теорема 1. *Существуют иррациональные числа a и b такие, что число a^b рационально.*

Доказательство. Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если это число рационально, то можно взять $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Если же число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально, можно взять $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Таким образом, в любом случае нужные a и b существуют. $\square$

Это доказательство является ярким образцом доказательства «чистого существования», когда доказывается существование некоторого объекта без явного предъявления его, и в этом смысле является неконструктивным.

Задача. Предложить конструктивное доказательство теоремы 1.

Интуиционистское исчисление высказываний

Как уже отмечалось, интуиционистская математика не пользуется какой-либо априорной логической системой, оправдывающей совершение того или иного шага в рассуждениях. Единственным критерием правильности рассуждения является интуитивная ясность каждого логического шага. Это, однако, не исключает существования некоторых общих логических правил, которые позволяют из данных истинных математических утверждений интуитивно ясным путем получать другие истинные утверждения. Выявление и изучение таких общих правил составляет предмет *интуиционистской логики*, являющейся важным разделом современной математической логики.

Одним из естественных путей построения интуиционистской логики является критический анализ классической логики и выявление тех ее принципов, которые приемлемы итуиционистски. Первая попытка построения системы аксиом интуиционистской логики была предпринята А. Н. Колмогоровым в 1925 г. Позднее были предложены другие системы аксиом. Они эквивалентны между собой в том смысле, что из них выводимы одни и те же формулы, и эквивалентны следующей системе Гейтинга:

И1. $A \to (B \to A)$;
И2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
И3. $A \wedge B \to A$;
И4. $A \wedge B \to B$;
И5. $A \to (B \to A \wedge B)$;
И6. $A \to A \vee B$;
И7. $B \to A \vee B$;
И8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;
И9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
И10. $A \to (\neg A \to B)$.

Эти схемы аксиом вместе с правилом modus ponens

$$\frac{A,\ A \to B}{B}\ (\text{MP})$$

задают интуиционистское исчисление высказываний (ИИВ).

Имеет место следующая теорема Гливенко.

Теорема 2. *Если A — тавтология, то формула $\neg\neg A$ выводима в ИИВ.*

Пример. Построим вывод формулы $A \to A$:

1) $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$ (аксиома И2);

2) $A \to (A \to A)$ (аксиома И1);

3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$ (получена по правилу МР из формул 1) и 2));

4) $A \to ((A \to A) \to A)$ (аксиома И1);

5) $A \to A$ (получено по правилу МР из формул 3) и 4)). $\square$

Задача. Построить вывод формулы $(A \vee \neg A) \to (\neg\neg A \to A)$.

Построение вывода в ИИВ является довольно сложной творческой задачей. Для облегчения ее решения разработана подходящая техника. Говорят, что формула A выводится в исчислении ИИВ из множества формул Γ, и пишут $\Gamma \vdash A$, если A выводится в исчислении, полученном добавлением формул из Γ к множеству аксиом. Имеет место следующая *теорема о дедукции*:

Теорема 3. $\Gamma \cup \{A\} \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$.

Пример. Докажем, что в ИИВ выводима формула

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A).$$

В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\{A \to B, \neg B\} \vdash \neg A.$$

Строим вывод:
1) $A \to B$ (гипотеза);
2) $\neg B$ (гипотеза);
3) $\neg B \to (A \to \neg B)$ (аксиома И1);
4) $A \to \neg B$ (получено из 2) и 3) по правилу MP);
5) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (аксиома И9);
6) $(A \to \neg B) \to \neg A$ (получено из 1) и 5) по правилу MP);
7) $\neg A$ (получено из 4) и 6) по правилу MP).

Модели Крипке для логики высказываний

Модель Крипке для логики высказываний определяется как тройка $\mathcal{K} = (K, \preceq, \Vdash)$, где $(K, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, называемое шкалой Крипке, а $\Vdash$ — соответствие между K и множеством всех переменных такое, что если $\alpha \Vdash P$ и $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P$. Соответствие $\Vdash$ называется оценкой. Элементы множества K можно трактовать как «моменты времени», причем $\alpha \preceq \beta$ означает, что момент α предшествует моменту β. Выражение $\alpha \Vdash P$ читается «α вынуждает P» или «P истинно в момент α». Интуитивно $\alpha \Vdash P$ означает, что в момент α утверждение P является доказанным, а условие, что если $\alpha \Vdash P$ и $\alpha \preceq \beta$, то $\beta \Vdash P$, выражает принцип сохранения истинности.

На основе соответствия $\Vdash$ определяется соответствие между множеством K и множеством всех формул, также обозначаемое $\Vdash$. Соответствие $\alpha \Vdash A$ задается индукцией по построению формулы A. Для переменной A оно уже определено. Далее полагаем:

$\alpha \Vdash (A \wedge B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A \wedge \alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \vee B) \rightleftharpoons [\alpha \Vdash A \vee \alpha \Vdash B]$;

$\alpha \Vdash (A \to B) \rightleftharpoons \forall\beta\,[\alpha \preceq \beta \Rightarrow (\beta \nVdash A \vee \beta \Vdash B)]$;

$\alpha \Vdash \neg A \rightleftharpoons \forall\beta\,[\alpha \preceq \beta \Rightarrow \beta \nVdash A]$.

Говорят, что формула A истинна в модели $\mathcal{K} = (K, \preceq, \Vdash)$, и пишут $\mathcal{K} \models A$, если $(\forall\alpha \in K)\,\alpha \Vdash A$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если пропозициональная формула A выводима в ИИВ, то A истинна в любой модели Крипке.*

Верно и обратное утверждение.

Теорема 5. *Если пропозициональная формула A невыводима в ИИВ, то существует контрмодель Крипке для A, т. е. такая модель $\mathcal{K}$, что $\mathcal{K} \not\models A$.*

Более того, для всякой невыводимой в ИИВ формулы можно построить контрмодель Крипке с конечной шкалой.

Теорема 4 позволяет доказывать невыводимость в ИИВ тех или иных формул путем построения контрмоделей Крипке для них.

Пример. Докажем, что формула $P\vee\neg P$ не выводится в ИИВ, построив для нее контрмодель Крипке. Положим $K = \{\alpha, \beta\}$, причем $\alpha \preceq \beta$. Пусть $\alpha \nVdash P$, $\beta \Vdash P$. Нетрудно проверить, что $\alpha \nVdash \neg P$, так что $\alpha \nVdash P \vee \neg P$.

Задача.
Построить контрмодели Крипке для следующих формул:

1. $\neg P \vee \neg\neg P$;

2. $(\neg\neg P \to P) \to (P \vee \neg P)$;

3. $((P \to Q) \to P) \to P)$.

Задача. Какие из следующих формул выводимы в ИИВ, а какие — нет?

1. $\neg\neg P \to P$;

2. $P \to \neg\neg P$;

3. $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$;

4. $\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$;

5. $(\neg P \vee Q) \to (P \to Q)$;

6. $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$;

7. $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$.