Ординалы

Будем говорить, что вполне упорядоченное множество A *меньше* B, если B равно (изоморфно) $A+C$ при непустом C; другими словами, если A изоморфно *начальному отрезку* B (подмножеству, любой элемент которого меньше любого из остальных элементов).

1. Верно ли, что
а) если $A<B$ и $B<C$ в указанном смысле, то $A<C$?
б) вполне упорядоченное множество не может быть меньше самого себя?
в) любое собственное подмножество вполне упорядоченного множества A является вполне упорядоченным и меньше A (в смысле приведённого определения)?
г) если $A<B$, то $A+C<B+C$?
д) если $A<B$, то $C+A<C+B$?
е) если $A<B$, а C непусто, то $C\times A<C\times B$?
ж) если $A<B$, а C непусто, то $A\times C<B\times C$?

2. Докажите, что для любых двух вполне упорядоченных множеств A и B верно ровно одно из трёх: $A<B$, $B<A$ или $A=B$.

Ординал — это класс эквивалентности изоморфных вполне упорядоченных множеств. Ординал $\alpha=[A]$ (класс всех порядков, изоморфных A) меньше ординала $\beta=[B]$, если A изоморфен собственному начальному отрезку B.

Из задач 1а и 2 имеем, что ординалы *линейно упорядочены.*

3. а) Докажите, что во всяком непустом множестве ординалов есть наименьший элемент.
б) Докажите принцип *трансфинитной индукции* для ординалов: если $F(\alpha)$ есть некоторое свойство ординалов, которое (для любого данного α) доказано в предположении верности $F(\beta)$ для любого $\beta<\alpha$, то $F(\alpha)$ верно при всех α.

4. (нижняя и верхняя грань) Пусть $\{\alpha_i\mid i\in I\}$ — семейство ординалов.
а) Доказать, что среди этого семейства есть наименьший ординал.
б) Доказать, что существует ординал β такой, что $\forall i\in I\ \alpha_i\leqslant\beta$ и среди всех таких β существует единственный наименьший (обозначаемый $\sup\{\alpha_i : i\in I\}$).

5. (деление с остатком) Доказать, что для любых ординалов α и $\beta\leqslant\alpha$ найдутся единственные ординалы γ и $\delta<\beta$, такие что $\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$.

6. (возведение в степень) Пусть A — линейно упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(A)$ множество всех конечных последовательностей $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ из элементов A таких, что $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Зададим порядок на $\Omega(A)$ как лексикографический: последовательность $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ *лексикографически больше* $\langle b_1,b_2,\ldots,b_m\rangle$, если либо для некоторого $k\leqslant\min(n,m)$ имеет место $a_k\geqslant b_k$ и $a_i=b_i$ для всех $i<k$, либо $n>m$ и $a_i=b_i$ для всех $i\leqslant m$.

Докажите, что если A было вполне упорядоченным множеством, то таково и $\Omega(A)$.

7. Класс изоморфизма множества $\Omega(X)$ обозначим через ω^α, если α — класс изоморфизма множества X. Проверьте следующие равенства:

а) $\omega^0=1$;

б) $\omega^1=\omega$;

в) $\omega^{\alpha+1}=\omega^\alpha\cdot\omega$;

г) $\omega^{\alpha+\beta}=\omega^\alpha\cdot\omega^\beta$.

Арифметика ординалов. Будем отождествлять натуральное число n и ординал, являющийся классом эквивалентности, состоящим из всех линейных порядков из n элементов (проверьте, что это действительно ординал). Обозначим через ω ординал $[\mathbb{N}]$. Пусть $\alpha=[A]$ и $\beta=[B]$, обозначим $\alpha+\beta=[A+B]$, $\alpha\cdot\beta=[A\cdot B]$, $\omega^\alpha=[\Omega(A)]$.

8. а) Докажите, что единственная бинарная операция $+'$, удовлетворяющая следующим свойствам — это сложение ординалов:

i) $\alpha +' 0 = \alpha$,
ii) $\alpha +' (\beta + 1) = (\alpha +' \beta) + 1$,
iii) $\alpha +' (\sup_{i\in I} \beta_i) = \sup_{i\in I}(\alpha +' \beta_i)$.
б) Докажите, что единственная бинарная операция $\cdot'$, удовлетворяющая следующим свойствам — это умножение ординалов:
i) $\alpha \cdot' 0 = 0$,
ii) $\alpha \cdot' (\beta + 1) = (\alpha \cdot' \beta) + \alpha$,
iii) $\alpha \cdot' (\sup_{i\in I} \beta_i) = \sup_{i\in I}(\alpha \cdot' \beta_i)$.
в) Докажите, что единственная функция f, удовлетворяющая следующим свойствам — это $\alpha \longmapsto \omega^\alpha$:
i) $f(0) = 1$,
ii) $f(\alpha + 1) = f(\alpha) \cdot \omega$,
iii) $f(\sup_{i\in I} \alpha_i) = \sup_{i\in I} f(\alpha_i)$.

9. (*Теорема Кантора о нормальной форме ординалов*) Докажите, что каждый ординал $\alpha > 0$ единственным образом представляется в виде

$$\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \ldots + \omega^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.