Определимость

В математике мы постоянно имеем дело с отношениями на множествах; примеры:

- двухместное (с двумя аргументами) отношение порядка $<$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$
- двухместное отношениее следования $p(x, y) \iff y = x + 1$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$

Множество с заданным на нем одним, или несколькими отношениями, называют структурой. В наших примерах речь идет о двух стурктурах:

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

Конечно, отношений может быть и несколько. Например, в обычной арифметике натуральных чисел используются трехместные отношения $z = x + y$ и $z = x * y$.

Нас будет интересовать вопрос о том, можно ли определить одно отношение через другое (или через несколько других).

Как, например, определить отношение $y = x+2$ через отношение $y = x+1$? В обычном языке можно написать так: «найдется такое число z, что $z = x + 1$ и $y = z + 1$».

На формальном языке математической логики можно написать:

$$y = x + 2 \equiv \exists z(z = x + 1 \wedge y = z + 1)$$

Определение 1. *Пусть на некотором множестве заданы два отношения. Будем говорить, что одно из них определимо через другое, если существует логическая формула, содержащая только второе отношение, равносильная первому отношению.*

Будем говорить, что два отношения эквивалентны, если каждое из них определимо через другое.

Аналогично можно дать определения для множеств отношений. Попробуйте сделать это.

Определение 2. *В 1916 г. Эдвард Хантингтон описал 3 отношения, естественно определяемые через отношение порядка. Это трехместные отношения «между», «цикл» и четырехместное отношение «зацепление».*

Попробуйте записать какие-то из этих отношений формулами, исходя из своего понимания их названий.

1 Рассматрим структуру порядка на рациональных числах $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$

(a) можно ли через отношение «между» определить отношение «меньше». Если нельзя – то почему?

Пытаясь решить эту задачу, можно прийти к идее преобразования множества, которое одно отношение сохраняет, а другое – нет. Попробуйте дать определение такого преобразования и использовать преобразования для решения задач.

(b) найдите как можно больше отношений, про которые вам кажется, что они попарно неэквивалентны. Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. отношений, среди отношений Хантингтона.

Следующие задачи довольно сложные. Если они не получатся, попробуйте порешать задачи из групп 2 и 3.

(c) (*) Докажите, что для всякого n существует только конечное количество попарно неэквивалентных n-местных отношений.

(d) (*) Опишите группу преобразований отношения «меньше», отношения «между»; каждого из найденных отношений.

(e) Для каждой пары неэквивалентных найденных отношений указать преобразование, которое одно из них сохраняет, а другое – нет. Если преобразование не находится, может быть, они эквивалентны?

(f) (**) Докажите, что существует только конечное количество попарно не эквивалентных отношений, попытайтесь найти их все.

2 Рассматривается структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

(a) можно ли определить отношение $y = x + 5$?

(b) определимо ли отношение $x < y$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$

(i) через какое-то отношение вида $y = x + n$?

(ii) через совокупность таких отношений?

(c) попробуйте найти как можно больше попарно неэквивалентных отношений. Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. отношений, среди отношений, которые напоминают вам отношения Хантингтона.

(d) (*) Докажите, что существует бесконечное количество попарно не эквивалентных отношений, попытайтесь найти их как можно больше. Если нашлись какие-то два отношения, которые выглядят не эквивалентными, но для них не удается построить различающее их преобразование, попробовать как-то расширить целые числа (придумать, что это значит и как расширить), чтобы в расширении преобразование уже нашлось.

3 Рассматривается структура точек на «клетчатой бумаге» $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$– пар целых чисел с двумя отношениями

«быть на единицу выше» $u(x, y) \iff y_1 = x_1 + 1 \wedge y_2 = x_2$ и

«быть на единицу правее» $r(x, y) \iff y_2 = x_2 + 1 \wedge y_1 = x_1$;

здесь x_1, y_1 – первые координаты точек x_2, y_2 – вторые.

Вопросы аналогичны вопросам (b), (c) в предыдущем пункте