

В математике мы постоянно имеем дело с отношениями на множествах; примеры:

- двухместное (с двумя аргументами) отношение порядка $<$ на множестве рациональных чисел \mathbb{Q}
- двухместное отношение следования $p(x, y) \iff y = x + 1$ на множестве целых чисел \mathbb{Z}

Множество с заданным на нем одним, или несколькими отношениями, называют структурой. В наших примерах речь идет о двух структурах:

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

Конечно, отношений может быть и несколько. Например, в обычной арифметике натуральных чисел используются трехместные отношения $z = x + y$ и $z = x * y$.

Нас будет интересовать вопрос о том, можно ли определить одно отношение через другое (или через несколько других).

Как, например, определить отношение $y = x + 2$ через отношение $y = x + 1$?

Множество с заданным на нем одним, или несколькими отношениями, называют структурой. В наших примерах речь идет о двух структурах:

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

Конечно, отношений может быть и несколько. Например, в обычной арифметике натуральных чисел используются трехместные отношения $z = x + y$ и $z = x * y$.

Нас будет интересовать вопрос о том, можно ли определить одно отношение через другое (или через несколько других).

Как, например, определить отношение $y = x + 2$ через отношение $y = x + 1$? В обычном языке можно написать так: «найдется такое число z , что $z = x + 1$ и $y = z + 1$ ».

Множество с заданным на нем одним, или несколькими отношениями, называют структурой. В наших примерах речь идет о двух структурах:

- $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$
- $\langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

Конечно, отношений может быть и несколько. Например, в обычной арифметике натуральных чисел используются трехместные отношения $z = x + y$ и $z = x * y$.

Нас будет интересовать вопрос о том, можно ли определить одно отношение через другое (или через несколько других).

Как, например, определить отношение $y = x + 2$ через отношение $y = x + 1$? В обычном языке можно написать так: «найдется такое число z , что $z = x + 1$ и $y = z + 1$ ». На формальном языке математической логики можно написать:

$$y = x + 2 \equiv \exists z(z = x + 1 \wedge y = z + 1)$$

Определение 1

Пусть на некотором множестве заданы два отношения. Будем говорить, что одно из них определимо через другое, если существует логическая формула, содержащая только второе отношение, равносильная первому отношению.

Будем говорить, что два отношения эквивалентны, если каждое из них определимо через другое.

Аналогично можно дать определения для множеств отношений. Попробуйте сделать это.

Определение 2

В 1916 г. Эдвард Хантингтон описал 3 отношения, естественно определяемые через отношение порядка. Это трехместные отношения «между», «цикл» и четырехместное отношение «зацепление».

Попробуйте как-нибудь изобразить какие-то из этих отношений формулами, картинками и пр., исходя из своего понимания их названий.

1. Структура порядка на рациональных числах $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$

- 1 можно ли через отношение «между» определить отношение «меньше». Если нельзя – то почему? Пытаясь решить эту задачу, можно прийти к идее преобразования множества, которое одно отношение сохраняет, а другое – нет. Попробуйте дать определение такого преобразования и использовать преобразования для решения задач.
- 2 найдите как можно больше отношений, про которые вам кажется, что они попарно неэквивалентны. Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. отношений, среди отношений Хантингтона.

1*. Порядок на рациональных, сложные задачи.

Следующие задачи довольно сложные. Если они не получатся, попробуйте порешать задачи из групп 2 и 3.

- 1 (*) Докажите, что для всякого n существует только конечное количество попарно неэквивалентных n -местных отношений.
- 2 (*) Опишите группу преобразований отношения «меньше», отношения «между»; каждого из найденных отношений.
- 3 Для каждой пары неэквивалентных найденных отношений указать преобразование, которое одно из них сохраняет, а другое – нет.
- 4 (**) Докажите, что существует только конечное количество попарно не эквивалентных отношений, попытайтесь найти их все.

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- 1 можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- 2 можно ли определить отношение $y = x + 1$
(2.i) через отношение $y = x + 2$?

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- ① можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- ② можно ли определить отношение $y = x + 1$
 - (2.i) через отношение $y = x + 2$?
 - (2.ii) через какое-то отношение вида $y = x + n$, где $n \neq 1$?

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- ① можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- ② можно ли определить отношение $y = x + 1$
 - (2.i) через отношение $y = x + 2$?
 - (2.ii) через какое-то отношение вида $y = x + n$, где $n \neq 1$?
 - (2.iii) через совокупность таких отношений?

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- 1 можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- 2 можно ли определить отношение $y = x + 1$
 - (2.i) через отношение $y = x + 2$?
 - (2.ii) через какое-то отношение вида $y = x + n$, где $n \neq 1$?
 - (2.iii) через совокупность таких отношений?
- 3 определимо ли отношение $x < y$ на множестве целых чисел \mathbb{Z}
 - (2.i) через какое-то отношение вида $y = x + n$?
 - (2.ii) через совокупность таких отношений?

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- 1 можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- 2 можно ли определить отношение $y = x + 1$
 - (2.i) через отношение $y = x + 2$?
 - (2.ii) через какое-то отношение вида $y = x + n$, где $n \neq 1$?
 - (2.iii) через совокупность таких отношений?
- 3 определимо ли отношение $x < y$ на множестве целых чисел \mathbb{Z}
 - (2.i) через какое-то отношение вида $y = x + n$?
 - (2.ii) через совокупность таких отношений?
- 4 попробуйте найти как можно больше попарно неэквивалентных отношений.
Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. отношений, среди отношений, которые напоминают вам отношения Хантингтона.

2. структура $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, y = x + 1 \rangle$

- 1 можно ли определить отношение $y = x + 5$?
- 2 можно ли определить отношение $y = x + 1$
 - (2.i) через отношение $y = x + 2$?
 - (2.ii) через какое-то отношение вида $y = x + n$, где $n \neq 1$?
 - (2.iii) через совокупность таких отношений?
- 3 определимо ли отношение $x < y$ на множестве целых чисел \mathbb{Z}
 - (2.i) через какое-то отношение вида $y = x + n$?
 - (2.ii) через совокупность таких отношений?
- 4 попробуйте найти как можно больше попарно неэквивалентных отношений. Попробуйте их искать среди одноместных, двухместных, трехместных и т.д. отношений, среди отношений, которые напоминают вам отношения Хантингтона.
- 5 (*) Докажите, что существует бесконечное количество попарно не эквивалентных отношений. Если для каких-то двух отношений, которые выглядят не эквивалентными, не удастся построить различающее их преобразование, попробовать как-то расширить целые числа (придумать, что это значит и как расширить), чтобы в расширении преобразование уже нашлось.

3. Структура точек в узлах «клетчатой бумаги» $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – пар целых чисел с двумя отношениями

«быть на единицу выше» $u(x, y) \iff y_1 = x_1 + 1 \wedge y_2 = x_2$

и

«быть на единицу правее» $r(x, y) \iff y_2 = x_2 + 1 \wedge y_1 = x_1$;

здесь x_1, y_1 – первые координаты точек x_2, y_2 – вторые.

Вопросы аналогичны вопросам в предыдущих пунктах

e-mail: alsemno@ya.ru; soprunov@mail.ru