Выразимость отношений (предикатов)

k-местным отношением (предикатом) на множестве M называется любое отображение множества M^k в множество $\{0,1\}$ (можно понимать его как подмножество множества M^k). Если на некотором элементе M^k предикат принимает значение 1, то мы говорим, что предикат *истинен* на этом элементе, иначе говорим, что он *ложен* на этом элементе. Примеры предикатов: $x = y$ (можно рассматривать как предикат на множествах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и т.д.), $x < y$, $x + y = z$, “x – простое число”.

Неформально, будем говорить, что предикат P на множестве M *выразим* из предикатов $P_1, P_2, \dots, P_k$ на множестве M, если мы можем высказать некоторое утверждение на русском языке, оперирующее только предикатами $P_1, P_2, \dots, P_k$, и такое, что оно истино в том и только том случае, если истинен предикат P. Более точно, из всего многообразия русского языка, кроме собственно предикатов $P_1, P_2, \dots, P_k$, мы можем использовать только союзы **И** (его в математической логике принято обозначать $\wedge$ или &) и **ИЛИ** (который обозначают $\vee$), конструкции “если A, то B” (её обозначают $A \to B$), “не A” (это обозначается как $\neg A$), и кванторы по переменным: “для всякого x” (обозначается $\forall x$) и “существует x” (обозначается $\exists x$).

1. Выразить предикат “больше либо равно” через предикат “больше” на множестве $\mathbb{Q}$.

2. а) Можно ли 3-местный предикат “лежать между” выразить через предикат “больше” на множестве $\mathbb{Q}$?

б) А наоборот: предикат “больше” через предикат “лежать между”?

в) Придумайте отношение, выразимое через отношение “лежать между”, но через которое отношение “лежать между” не выразимо.

3. На множестве натуральных чисел (с нулём) из предиката $x+y = z$ выразить следующие предикаты: **а)** $x = y$; **б)** $x \leqslant y$; **в)** $x = 0$; **г)** $x = 1$; **д)** $x = N$, для всякого фиксированного N; **е)** “x – четно”.

4. Можно ли предикат “больше” выразить через 3-местный предикат $x < y < z$ на множестве
а) $\mathbb{Q}$; **б)** $[0, 1]$; **в)** $\mathbb{Z}$?

5. Выразим ли предикат $xy = z$ через предикаты $x = y,\ x + y = z,\ y = x^2$ на множестве $\mathbb{R}$?

6. На множестве $\mathbb{R}$ даны предикаты $x + y = z,\ xy = z$, выразим ли через них предикат $x > 0$?

7. а) Можно ли через предикат $x < y$ на множестве $\mathbb{Z}$ выразить предикат $x + y = z$?

б) Можно ли через предикат $x + y = z$ на множестве $\mathbb{Z}$ выразить предикат $x < y$?

8. а) Выразим ли предикат $x = 1$ через предикат $x < y$ на множестве $\mathbb{Q}$? **б)** А через предикаты $x < y$ и $x + y = z$?

9. Выразим ли предикат $x = i$ на множестве $\mathbb{C}$ через предикаты $x + y = z$ и $xy = z$?

10. Выразим ли предикат $y = x + 2$ через предикат $y = x + 1$ на множестве $\mathbb{Z}$? А наоборот?

11. На множестве $\mathbb{N}$ дан предикат $x|y$ (x делит y), выразимы ли следующие предикаты: **а)** $x = y$; **б)** $x = 0$; **в)** $x = 1$; **г)** “x — простое”; **д)** $x = 2$; **е)** $x < y$?

12.* Доказать, что если предикат P выразим через предикат $x < y$ на множестве $\mathbb{Q}$, то он выразим через $x < y$ и на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$, где a – произвольный элемент $\mathbb{Q}$.

13.* На множестве $\mathbb{N}$ даны предикаты $x < y$ и $z = xy$. Выразим ли предикат $z = x + y$?

14.* На множестве $\mathbb{N}$ даны предикаты $x < y$ и $x|y$ (x делит y). Выразимы ли следующие предикаты: **а)** $z = x + y$; **б)** $z = xy$?

15.* На множестве $\mathbb{Z}$ дан предикат $y = x+1$. Выразить предикат $y = x+N$, где N – большое фиксированное число, с помощью короткой формулы (длина формулы должна быть существенно меньше N). Под длиной формулы здесь понимается количество символов в ней.