ОМЕГА-ЯЗЫКИ И АВТОМАТЫ НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ СЛОВАМИ

1. Омега-языки и операции на них

Σ^* — множество конечных строк, составленных из символов множества Σ. Σ^ω — множество бесконечных строк, составленных из символов множества Σ. Подмножество $L \subseteq \Sigma^*$ — (обычный) язык. Подмножество $W \subseteq \Sigma^\omega$ — ω-язык.

Умножение строк — это их конкатенация: $a_1 \dots a_n \cdot b_1 \dots b_m = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$. Умножать можно и конечную строку на бесконечную: $a_1 \dots a_n \cdot b_1 b_2 \dots = a_1 \dots a_n b_1 b_2 \dots$. Вместо $u \cdot v$ часто пишем просто uv. Умножение языков состоит из попарных умножений их строк: $L \cdot M = \{uv \mid u \in L, v \in M\}$.

$\mathbb{B} = \{0,1\}$. На множестве $\mathbb{B}^\omega$ задана метрика: $\rho(a_1a_2\dots, b_1b_2\dots) = 1/2^k$, где $k = \min\{m \mid a_m \neq b_m\}$. Эта метрика задает топологию на $\mathbb{B}^\omega$. Топологическое пространство $\mathbb{B}^\omega$ называется канторовским пространством (можно доказать, что оно изоморфно канторовскому множеству с топологией, индуцированной с $\mathbb{R}$).

Из обычного языка L можно получить ω-язык с помощью таких операций:

(1) $L^\omega = \{w_1 w_2 w_3 \dots\}$;
(2) $\lim L$ — множество бесконечных слов $w = a_1 a_2 \dots$ таких, что существует бесконечно много n, для которых $a_1 \dots a_n \in L$.

Из ω-языка $L \subseteq \Sigma^\omega$ можно получить обычный язык с помощью операции $\operatorname{Pref} L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^\omega\ uv \in L\}$.

1.1. Задачи.

(1) Опишите открытые и замкнутые множества в канторовском пространстве $\mathbb{B}^\omega$.
(2) Пусть $L \subseteq \mathbb{B}^*$ — обычный язык, который состоит из строк
  (a) в которых число нулей и единиц совпадает (например, $010011 \in L$, а $01001 \notin L$).
  (b) вида $0^n 1^n = \underbrace{0\dots0}_{n \text{ раз}}\underbrace{1\dots1}_{n \text{ раз}}$.

  "Вычислите" (то есть, опишите) для каждого из этих языков $\lim L$ и L^ω.
(3) Пусть $Rep \subseteq \mathbb{B}^*$ — язык, состоящий из строк вида $a_1 \dots a_k a_1 \dots a_k$ (например, $0010100101, 110110 \in L$). Определим бесконечное слово φ, называемое *словом Фибоначчи*, как предел слов φ_n, где $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 01$ и $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1}\varphi_n$. Докажите, что $\varphi \in \lim Rep$.
(4) Пусть $Pal \subseteq \mathbb{B}^*$ — язык, состоящий из строк-палиндромов (например, $011010110, 1001 \in L$). Докажите, что $\varphi \in \lim Pal$.
(5) Для бесконечной строки $w = w_1 w_2 w_3 \dots \in \mathbb{B}^\omega$ определим последовательность $A_n^w = \frac{w_1 + \dots + w_n}{n}$ — доля единиц среди первых n символов w. Существует ли обычный язык L, такой, что $\lim L = \{w \mid \lim\limits_{n\to\infty} A_n^w = 0\}$? а такой, что $\lim L = \{w \mid \lim\limits_{n\to\infty} A_n^w = 0.5\}$?
(6) Обозначим за $\mathbf{G}_\delta$ множество, состоящее из счётных пересечений открытых множеств пространства $\mathbb{B}^\omega$. Докажите, что $\mathbf{G}_\delta = \{\lim L \mid L \subseteq \mathbb{B}^*\}$, то есть, что пределы языков и счетные пересечения открытых множеств $\mathbb{B}^\omega$ совпадают.
(7) Обозначим за $\mathbf{F}_\sigma$ множество, состоящее из счётных объединений замкнутых множеств пространства $\mathbb{B}^\omega$. Докажите, что ни одно из множеств $\mathbf{G}_\delta$ и $\mathbf{F}_\sigma$ не содержится в другом.
(8) Правда ли, что для любого обычного языка L существует такой обычный язык M, что $L^\omega = \lim M$?

2. Конечные автоматы на омега-языках

Определение 1. *Конечный автомат* — структура $(Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$, где

(1) Q — конечное множество состояний; $q_0 \in Q$ — стартовое состояние; $F \subseteq Q$ — набор заключительных состояний;
(2) Σ — конечный алфавит (мы обычно будем рассматривать $\Sigma = \mathbb{B}$);
(3) $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ — набор инструкций.

Инструкция $(q, a, r) \in \Delta$ говорит, что, если автомат находится в состоянии q и считывает символ a, то он может перейти в состояние r.

Формально говоря, пусть w — бесконечная строка, составленная из символов Σ; тогда конфигурацией называется пара (q, w), где $q \in Q$. Если $(q, a, r) \in \Delta$, то мы говорим, что из конфигурации (q, au) выводится конфигурация (r, u) (обозначаем $(q, au) \Rightarrow (r, u)$). Мы говорим, что слово $w = a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots \in \Sigma^\omega$ допускается конечным автоматом, если существует бесконечный вывод вида

$$(q_0, a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots) \Rightarrow (q_1, a_1 a_2 a_3 \ldots) \Rightarrow (q_1, a_2 a_3 \ldots) \Rightarrow (q_1, a_3 \ldots) \Rightarrow \ldots$$

в котором бесконечное число раз встречаются заключительные состояния из F; то есть, множество $\{i \mid q_i \in F\}$ должно быть бесконечным.

2.1. Задачи.

(1) Докажите, что для любого регулярного ω-языка L существует число n и регулярные обычные языки $L_1, \ldots, L_n$, $M_1, \ldots, M_n$, такие, что $L = (L_1 \cdot M_1^\omega) \cup \ldots \cup (L_n \cdot M_n^\omega)$.
(2) Каждый из следующих ω-языков, если возможно, задайте конечным автоматом, иначе объясните, почему это невозможно:
   (a) $L = \{010101\ldots\}$;
   (b) $w \in L \Leftrightarrow$ в строку w бесконечное число раз входит подстрока 001;
   (c) $a_1 a_2 \ldots \in L \Leftrightarrow$ все a_i начиная с некоторого номера равны 0.
   (d) $w \in L \Leftrightarrow$ в строке w нет подстроки 111;
   (e) $L = \{w \mid \lim_{n\to\infty} A_n^w = 0\}$ (см. задачу 5 из предыдущего раздела);
   (f) $a_1 a_2 \ldots \in L \Leftrightarrow$ бесконечная строка $a_1 a_3 a_5 \ldots$ содержит бесконечное число нулей и единиц, а бесконечная строка $a_2 a_4 a_6 \ldots$ содержит либо конечное число нулей, либо конечное число единиц.
(3) Докажите, что, если L и M — два регулярных ω-языка, то $L \cup M$, $L \cap M$ и $L \setminus M$ — регулярные ω-языки.
(4) Правда ли, что если L — регулярный ω-язык, то $\operatorname{Pref} L$ — регулярный обычный язык?
(5) Правда ли, что если L — регулярный обычный язык, то $\lim L$ — регулярный ω-язык?