Сильная полнота модальных логик относительно конечных шкал

Евгений Золин

старший научный сотрудник
Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

Ломоносовские чтения — 2021
28 апреля 2021 года

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний $\Longleftrightarrow$ *она общезначима:*

$$\vdash A \quad \Longleftrightarrow \quad \models A, \qquad \text{для всякой формулы } A \in \mathrm{Fm}.$$

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний $\iff$ *она общезначима:*

$$\vdash A \quad \iff \quad \models A, \qquad \text{для всякой формулы } A \in \mathrm{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A *выводима из гипотез* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \iff$ *формула* A *семантически следует из* Γ*:*

$$\Gamma \vdash A \quad \iff \quad \Gamma \models A, \qquad \text{для любых } A \in \mathrm{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm}.$$

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний $\Longleftrightarrow$ *она общезначима:*

$$\vdash A \quad\Longleftrightarrow\quad \models A, \qquad \text{для всякой формулы } A \in \mathrm{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A *выводима из гипотез* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ $\Longleftrightarrow$ *формула* A *семантически следует из* Γ*:*

$$\Gamma \vdash A \quad\Longleftrightarrow\quad \Gamma \models A, \qquad \text{для любых } A \in \mathrm{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm}.$$

Аналогично — для логики предикатов.

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний $\iff$ *она общезначима:*

$$\vdash A \quad\iff\quad \models A, \qquad \text{для всякой формулы } A \in \mathrm{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A *выводима из гипотез* $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ $\iff$ *формула* A *семантически следует из* Γ*:*

$$\Gamma \vdash A \quad\iff\quad \Gamma \models A, \qquad \text{для любых } A \in \mathrm{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm}.$$

Аналогично — для логики предикатов.

Док-во сильной полноты проводится фактически так же, как и слабой: непротиворечивое множество формул погружаем в максимальное непротиворечивое (и насыщенное) и по нему строим модель.

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода:

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Определение

Нормальная модальная логика — множество $L \subseteq \mathrm{Fm}$, такое что

Исчисление K

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \to (q \to p)$ и т.д.
- $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (*аксиома дистрибутивности*)

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ (Sub) $\dfrac{A}{A[p := B]}$

Определение

Нормальная модальная логика — множество $L \subseteq \mathrm{Fm}$, такое что
– L содержит все аксиомы логики K,
– L замкнуто по трем правилам вывода (MP), (Nec), (Sub).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Теорема о дедукции

Если $\Gamma, B \vdash_L A$, то $\Gamma \vdash_L (B \to A)$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Теорема о дедукции

Если $\Gamma, B \vdash_L A$, то $\Gamma \vdash_L (B \to A)$.

Если $\Gamma, B \vdash_L^* A$, то $\exists n \geqslant 0$: $\Gamma \vdash_L^* B \wedge \Box B \wedge \ldots \wedge \Box^n B \to A$.

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A \;::=\; p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A \ ::= \ p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A \;::=\; p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A *истинна* в точке x):

$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$

$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ — то есть неверно, что $M, \models A$

$M, x \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A$ **и** $M, x \models B$

$M, x \models A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A$ **или** $M, x \models B$

$M, x \models A \to B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ **или** $M, x \models B$

$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow$ существует $y \in W$, такой что xRy и $M, y \models A$

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A \ ::= \ p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \to B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \varnothing$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A *истинна* в точке x):

$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$

$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ — то есть неверно, что $M, \models A$

$M, x \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A$ **и** $M, x \models B$

$M, x \models A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A$ **или** $M, x \models B$

$M, x \models A \to B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A$ **или** $M, x \models B$

$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow$ существует $y \in W$, такой что xRy и $M, y \models A$

$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow$ для всех $y \in W$, таких что xRy, имеем $M, y \models A$

Главная особенность — есть два понятия истинности:

- локальная истинность в точке: $M, x \models A$,
- глобальная истинность в модели: $M \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула.
Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models^*_L A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models^*_L A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models_L^* A$. Обратное не верно.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models^*_L A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models^*_L A$. Обратное не верно.

Факт 2. При пустом Γ эти понятия совпадают: $\models_L A \quad \Leftrightarrow \quad \models^*_L A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \mathrm{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L-моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models^*_L A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A, если для каждой L-модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models^*_L A$. Обратное не верно.

Факт 2. При пустом Γ эти понятия совпадают: $\models_L A \quad \Leftrightarrow \quad \models^*_L A$.

И означают: A общезначима на всех шкалах логики L.

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всякой формулы } A \text{ имеем:} \quad \vdash_L A \iff \vDash_L A.$$

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всякой формулы } A \text{ имеем:} \quad \vdash_L A \iff \models_L A.$$

Определение

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \quad B \vdash_L A \iff B \models_L A.$$

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всякой формулы } A \text{ имеем:} \quad \vdash_L A \iff \models_L A.$$

Определение

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \quad B \vdash_L A \iff B \models_L A.$$

Эти два определения равносильны.

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \qquad B \vdash_L A \iff B \models_L A.$$

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \qquad B \vdash_L A \iff B \models_L A.$$

Определение (Глобальная полнота, ГП)

Логика L глобально полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \qquad B \vdash_L^* A \iff B \models_L^* A.$$

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \quad B \vdash_L A \iff B \models_L A.$$

Определение (Глобальная полнота, ГП)

Логика L глобально полна, если

$$\text{для всяких формул } A \text{ и } B \text{ имеем:} \quad B \vdash_L^* A \iff B \models_L^* A.$$

Теперь заменим B на множество формул $\Gamma \quad \mapsto \quad$ сильная полнота.

Сильная полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Сильная локальная полнота, СЛП)

Логика L сильно локально полна, если

$$\text{для всяких } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \text{ и } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем:} \quad \Gamma \vdash_L A \iff \Gamma \models_L A.$$

Сильная полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Сильная локальная полнота, СЛП)

Логика L сильно локально полна, если

$$\text{для всяких } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \text{ и } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем:} \quad \Gamma \vdash_L A \iff \Gamma \models_L A.$$

Определение (Сильная глобальная полнота, СГП)

Логика L сильно глобально полна, если

$$\text{для всяких } \Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \text{ и } A \in \mathrm{Fm} \text{ имеем:} \quad \Gamma \vdash_L^* A \iff \Gamma \models_L^* A.$$

Все виды полноты на одной диаграмме

$$\boxed{\begin{array}{c} B \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} \quad \Longleftarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} B \vdash_L^* A \quad \Leftrightarrow \quad B \models_L^* A \\ L \text{ глобально полна} \end{array}}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models_L A \\ L \text{ сильно локально полна} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash_L^* A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models_L^* A \\ L \text{ сильно глобально полна} \end{array}}$$

Все виды полноты на одной диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c} B \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} & \Longleftarrow & \boxed{\begin{array}{c} B \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models^*_L A \\ L \text{ глобально полна} \end{array}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models_L A \\ L \text{ сильно локально полна} \end{array}} & \Longleftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models^*_L A \\ L \text{ сильно глобально полна} \end{array}}
\end{array}$$

Все виды полноты на одной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} B \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models_L A \\ L \text{ (локально) полна} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} B \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models^*_L A \\ L \text{ глобально полна} \end{array}} \arrow[l, Rightarrow] \\
\boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models_L A \\ L \text{ сильно локально полна} \end{array}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\begin{array}{c} \Gamma \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models^*_L A \\ L \text{ сильно глобально полна} \end{array}} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Теорема (СЛП = СГП)

Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда:

$$L \text{ сильно локально полна} \quad \Longleftrightarrow \quad L \text{ сильно глобально полна.}$$

Все виды полноты на одной диаграмме

$B \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models_L A$ L (локально) полна	$\Longleftarrow$	$B \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad B \models^*_L A$ L глобально полна
$\Uparrow$		$\Uparrow$
$\Gamma \vdash_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models_L A$ L сильно локально полна	$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \vdash^*_L A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \models^*_L A$ L сильно глобально полна

Теорема (СЛП = СГП)

Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда:

$$L \text{ сильно локально полна} \quad \Longleftrightarrow \quad L \text{ сильно глобально полна.}$$

Существуют логики, полные, но не сильно полные.

Пример: логика Гёделя – Лёба: $\mathrm{GL} = \mathrm{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{(локально) полная логика } L} \\ \Uparrow \\ \boxed{\text{глобально полная логика } L} \\ \Uparrow \\ \boxed{\text{сильно полная логика } L} \end{array}$$

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$\boxed{\text{(локально) полная логика } L}$

$\Uparrow$

$\boxed{\text{глобально полная логика } L}$

$\Uparrow$

$\boxed{\text{сильно полная логика } L}$

$\Uparrow$

$\boxed{\text{каноническая логика } L}$

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$\boxed{\text{(локально) полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{глобально полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{сильно полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{каноническая логика } L}$$

Определение

L **каноническая**, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$\boxed{\text{(локально) полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{глобально полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{сильно полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{каноническая логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{элементарная логика } L}$$

Определение

L **каноническая**, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$\boxed{\text{(локально) полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{глобально полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{сильно полная логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{каноническая логика } L}$$
$$\Uparrow$$
$$\boxed{\text{элементарная логика } L}$$

Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.
L элементарная, если $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал $\mathbb{F}$ элементарен.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\text{(локально) полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{глобально полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{сильно полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{каноническая логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{элементарная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{табличная логика } L}
\end{array}
$$

Определение

L **каноническая**, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.
L **элементарная**, если $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал $\mathbb{F}$ элементарен.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\text{(локально) полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{глобально полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{сильно полная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{каноническая логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{элементарная логика } L} \\
\Uparrow \\
\boxed{\text{табличная логика } L}
\end{array}
$$

Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.
L элементарная, если $L = \mathrm{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал $\mathbb{F}$ элементарен.
L табличная, если $L = \mathrm{Logic}(F)$ для некоторой конечной шкалы F.

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо "L-модель" писать "модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал", то будут получаться всевозможные понятия полноты логики относительно такого-то класса шкал.

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо "L-модель" писать "модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал", то будут получаться всевозможные понятия полноты логики относительно такого-то класса шкал.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо "L-модель" писать "модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал", то будут получаться всевозможные понятия полноты логики относительно такого-то класса шкал.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).
- "Полноту относительно конечных шкал" еще называется финитной аппроксимируемостью: локальной, глобальной, сильной.

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо "L-модель" писать "модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал", то будут получаться всевозможные понятия полноты логики относительно такого-то класса шкал.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).
- "Полноту относительно конечных шкал" еще называется финитной аппроксимируемостью: локальной, глобальной, сильной.
- Два вида сильной полноты над любым классом конечных шкал (замкнутым относительно порожденных подшкал) — совпадают:

$$\text{СЛП(конечные шкалы)} = \text{СГП(конечные шкалы)}.$$

Все виды полноты логики

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — сильно полна}}
\end{array}$$

Все виды полноты логики

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — сильно полна}}
\end{array}$$

Теорема (Харроп, для локальной и глобальной Ф.А.)

Пусть $L = \mathrm{K} \oplus C$ — конечно аксиоматизируемая логика.

(1) *Если L — полна отн. конечных шкал, то отношение локальной выводимости $B \vdash_L A$ разрешимо.*

Все виды полноты логики

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} & \Longrightarrow & \boxed{L \text{ — сильно полна}}
\end{array}$$

Теорема (Харроп, для локальной и глобальной Ф.А.)

Пусть $L = \mathrm{K} \oplus C$ — конечно аксиоматизируемая логика.

(1) *Если L — полна отн. конечных шкал, то отношение локальной выводимости $B \vdash_L A$ разрешимо.*

(2) *Если L — глобально полна отн. конечных шкал, то отношение глобальной выводимости $B \vdash_L^* A$ разрешимо.*

Все виды полноты логики

$$\begin{tikzcd}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Все виды полноты логики

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{L\ \text{— полна отн. КШ}} \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{L\ \text{— полна}} \\
\boxed{L\ \text{— глобально полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{L\ \text{— глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L\ \text{— сильно полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{L\ \text{— сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
& & \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
& & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
& & \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики

$$\begin{tikzcd}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{L \text{ — сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
& \boxed{L \text{ — сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
& \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} \arrow[uuu, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
& \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{L \text{ — сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[uuuu, Rightarrow] & \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{L \text{ — полна отн. КШ}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — полна}} \\
\boxed{L \text{ — глобально полна отн. КШ}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{L \text{ — глобально полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{L \text{ — сильно полна}} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{каноническая логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
 & \boxed{\text{элементарная логика } L} \arrow[u, Rightarrow] \\
\boxed{L \text{ — сильно полна отн. КШ}} \arrow[uuuu, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \boxed{\text{табличная логика } L} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L *— непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда*

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \mathrm{Int}$ *сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал* $\iff$ L *таблична.*

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \mathrm{Int}$ сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал $\iff L$ таблична.

Результат упомянут (Теорема 3.1.7, без док-ва) в книге:

- Одинцов С.П., Сперанский С.О., Дробышевич С.А. *Введение в неклассические логики*, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \mathsf{Int}$ сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал $\iff$ L таблична.

Результат упомянут (Теорема 3.1.7, без док-ва) в книге:

- Одинцов С.П., Сперанский С.О., Дробышевич С.А. *Введение в неклассические логики*, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

Можно было бы ожидать его аналог для расширений модальной логики $\mathsf{S4}$, то есть классов рефлексивных транзитивных шкал. Однако удалось получить его для произвольных модальных логик.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ называем *модально компактным*, если

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{F}$, то и всё Γ выполнимо в классе $\mathbb{F}$.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{F}$, то и всё Γ выполнимо в классе $\mathbb{F}$.

Это Теорема о компактности, применённая к данному классу шкал.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$ *выполнимо в классе шкал* $\mathbb{F}$, если существует $\mathbb{F}$-модель M и ее точка x, такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал $\mathbb{F}$ называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе $\mathbb{F}$, то и всё Γ выполнимо в классе $\mathbb{F}$.

Это Теорема о компактности, применённая к данному классу шкал.

Пример

Всякий элементарный класс шкал — модально компактен.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, иррефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, иррефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых модальной формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики GL.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, иррефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых модальной формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики GL.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. не компактны.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, иррефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых модальной формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики GL.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. не компактны.
- Класс конечых GL-шкал — модально не компактен.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, иррефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых модальной формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики GL.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. не компактны.
- Класс конечых GL-шкал — модально не компактен.

Вопрос. У каких логик класс конечных шкал — модально компактен?

Теорема

Для всякого класса шкал $\mathbb{F}$, замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

(1) *класс шкал $\mathbb{F}$ модально компактен,*

(2) *отношение локального следования $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A$ компактно,*

(3) *отношение глобального следования $\Gamma \models^{*}_{\mathbb{F}} A$ компактно.*

Теорема

Для всякого класса шкал $\mathbb{F}$, замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

(1) *класс шкал $\mathbb{F}$ модально компактен,*
(2) *отношение локального следования $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A$ компактно,*
(3) *отношение глобального следования $\Gamma \models^{*}_{\mathbb{F}} A$ компактно.*

Теорема (Критерий сильной полноты логики)

Для всякой нормальной логики L и всякого класса шкал $\mathbb{F}$, замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал,

L *сильно полна отн.* $\mathbb{F}$ $\iff$ L *полна отн.* $\mathbb{F}$ *и*
класс шкал $\mathbb{F}$ *модально компактен.*

Теорема

Для всякого класса шкал $\mathbb{F}$, замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

(1) *класс шкал $\mathbb{F}$ модально компактен,*
(2) *отношение локального следования $\Gamma \models_{\mathbb{F}} A$ компактно,*
(3) *отношение глобального следования $\Gamma \models_{\mathbb{F}}^{*} A$ компактно.*

Теорема (Критерий сильной полноты логики)

Для всякой нормальной логики L и всякого класса шкал $\mathbb{F}$, замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал,

L *сильно полна отн.* $\mathbb{F}$ $\iff$ L *полна отн.* $\mathbb{F}$ *и*
класс шкал $\mathbb{F}$ *модально компактен.*

Следствие (Е.З., 2019)

Класс шкал логики Frames(L) *модально компактен у табличных логик и только у них.*

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных?

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
   Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных? Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
    - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных? Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных? Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.
   - Говорят: класс GL-шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
   Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.
   Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.
   - Говорят: класс GL-шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

   Какова ситуация с конечными шкалами этой и других логик?

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
   Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.
   Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.
   - Говорят: класс GL-шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

   Какова ситуация с конечными шкалами этой и других логик?

2. Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
   Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.
   Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.
   - Говорят: класс GL-шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

   Какова ситуация с конечными шкалами этой и других логик?

2. Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?

3. Есть ли аналоги этих результатов для модальньных и интуиционистких предикатных логик?

Дальнейшие направления исследований

1. Что происходит в логиках с конечным числом переменных? Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $\mathsf{GL} = \mathsf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
   - Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
   - Если же рассматривать замкнутые модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL-шкал верна.
   - Говорят: класс GL-шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

   Какова ситуация с конечными шкалами этой и других логик?

2. Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?

3. Есть ли аналоги этих результатов для модальньных и интуционистких предикатных логик?

Спасибо!