

Сильная полнота модальных логик относительно конечных шкал

Евгений Золин

старший научный сотрудник
Кафедра математической логики и теории алгоритмов
Механико математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

Ломоносовские чтения — 2021
28 апреля 2021 года

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний \iff она общезначима:

$$\vdash A \iff \models A, \quad \text{для всякой формулы } A \in \text{Fm}.$$

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний \iff она общезначима:

$$\vdash A \iff \models A, \quad \text{для всякой формулы } A \in \text{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A выводима из гипотез $\Gamma \subseteq \text{Fm} \iff$ формула A семантически следует из Γ :

$$\Gamma \vdash A \iff \Gamma \models A, \quad \text{для любых } A \in \text{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \text{Fm}.$$

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний \iff она общезначима:

$$\vdash A \iff \models A, \quad \text{для всякой формулы } A \in \text{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A выводима из гипотез $\Gamma \subseteq \text{Fm} \iff$ формула A семантически следует из Γ :

$$\Gamma \vdash A \iff \Gamma \models A, \quad \text{для любых } A \in \text{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \text{Fm}.$$

Аналогично — для логики предикатов.

Теоремы о полноте логик высказываний и предикатов

Теорема (Полнота логики высказываний)

Формула выводима в логике высказываний \iff она общезначима:

$$\vdash A \iff \models A, \quad \text{для всякой формулы } A \in \text{Fm}.$$

Теорема (Сильная полнота логики высказываний)

Формула A выводима из гипотез $\Gamma \subseteq \text{Fm} \iff$ формула A семантически следует из Γ :

$$\Gamma \vdash A \iff \Gamma \models A, \quad \text{для любых } A \in \text{Fm} \text{ и } \Gamma \subseteq \text{Fm}.$$

Аналогично — для логики предикатов.

Док-во сильной полноты проводится фактически так же, как и слабой: непротиворечивое множество формул погружаем в максимальное непротиворечивое (и насыщенное) и по нему строим модель.

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (аксиома дистрибутивности)

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (аксиома дистрибутивности)

Правила вывода:

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (аксиома дистрибутивности)

Правила вывода: (MP) $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ (Nec) $\frac{A}{\Box A}$ (Sub) $\frac{A}{A[p := B]}$

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (аксиома дистрибутивности)

Правила вывода: (MP) $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ (Nec) $\frac{A}{\Box A}$ (Sub) $\frac{A}{A[p := B]}$

Определение

Нормальная модальная логика — множество $L \subseteq \text{Fm}$, такое что

Модальная логика K (лучше сказать, исчисление)

Аксиомы:

- Аксиомы исчисления высказываний: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ и т.д.
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (аксиома дистрибутивности)

Правила вывода: (MP) $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ (Nec) $\frac{A}{\Box A}$ (Sub) $\frac{A}{A[p := B]}$

Определение

- Нормальная модальная логика* — множество $L \subseteq \text{Fm}$, такое что
- L содержит все аксиомы логики K,
 - L замкнуто по трем правилам вывода (MP), (Nec), (Sub).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Теорема о дедукции

Если $\Gamma, B \vdash_L A$, то $\Gamma \vdash_L (B \rightarrow A)$.

Два вида выводимости из гипотез в модальной логике

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.

Определение

Локальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилу (MP).

Глобальная выводимость в L формулы из гипотез: $\Gamma \vdash_L^* A$ означает: существует вывод формулы A из $L \cup \Gamma$ по правилам (MP) и (Nec).

Компактность

Если $\Gamma \vdash_L A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L A$.

Если $\Gamma \vdash_L^* A$, то существует конечное $\Gamma' \subseteq \Gamma$, такое что $\Gamma' \vdash_L^* A$.

Теорема о дедукции

Если $\Gamma, B \vdash_L A$, то $\Gamma \vdash_L (B \rightarrow A)$.

Если $\Gamma, B \vdash_L^* A$, то $\exists n \geq 0: \Gamma \vdash_L^* B \wedge \Box B \wedge \dots \wedge \Box^n B \rightarrow A$.

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A ::= p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A ::= p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A ::= p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A *истинна* в точке x):

$$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$$

$$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, x \models A$$

$$M, x \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A \text{ и } M, x \models B$$

$$M, x \models A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A \text{ или } M, x \models B$$

$$M, x \models A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B$$

$$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \text{существует } y \in W, \text{ такой что } xRy \text{ и } M, y \models A$$

$$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \in W, \text{ таких что } xRy, \text{ имеем } M, y \models A$$

Семантика Крипке

Модальные формулы строятся согласно грамматике:

$$A ::= p_i \mid \neg A \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \mid (A \rightarrow B) \mid \Box A \mid \Diamond A.$$

Модель Крипке: $M = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$, $V(p_i) \subseteq W$.

Определение

Определим по индукции $M, x \models A$ (формула A *истинна* в точке x):

$$M, x \models p_i \quad \Leftrightarrow \quad x \in V(p_i)$$

$$M, x \models \neg A \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A \text{ — то есть неверно, что } M, x \models A$$

$$M, x \models A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A \text{ и } M, x \models B$$

$$M, x \models A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \models A \text{ или } M, x \models B$$

$$M, x \models A \rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad M, x \not\models A \text{ или } M, x \models B$$

$$M, x \models \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \text{существует } y \in W, \text{ такой что } xRy \text{ и } M, y \models A$$

$$M, x \models \Box A \quad \Leftrightarrow \quad \text{для всех } y \in W, \text{ таких что } xRy, \text{ имеем } M, y \models A$$

Главная особенность — есть два понятия истинности:

- **локальная истинность** в точке: $M, x \models A$,
- **глобальная истинность** в модели: $M \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq Fm$ — мн-во формул, $A \in Fm$ — формула.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.
Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула.
Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models_L^* A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models_L^* A$. Обратное **не верно**.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models_L^* A$. Обратное **не верно**.

Факт 2. При пустом Γ эти понятия совпадают: $\models_L A \Leftrightarrow \models_L^* A$.

Локальное следование (семантическое)

Пусть L — норм. логика, $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ — мн-во формул, $A \in \text{Fm}$ — формула. Модель $M = (F, V)$ будем называть L -моделью, если $F \models L$.

Определение (Локальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L A$)

Из Γ локально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M и ее точки x имеем: если $M, x \models \Gamma$, то $M, x \models A$.

Определение (Глобальное следование, обозначение: $\Gamma \models_L^* A$)

Из Γ глобально следует над логикой L формула A , если для каждой L -модели M имеем: если $M \models \Gamma$, то $M \models A$.

Факт 1. Если $\Gamma \models_L A$, то $\Gamma \models_L^* A$. Обратное **не верно**.

Факт 2. При пустом Γ эти понятия совпадают: $\models_L A \Leftrightarrow \models_L^* A$.

И означают: A общезначима на всех шкалах логики L .

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) **полна**, если

для всякой формулы A имеем: $\vdash_L A \iff \models_L A$.

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) **полна**, если

для всякой формулы A имеем: $\vdash_L A \iff \models_L A$.

Определение

Логика L (локально) **полна**, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L A \iff B \models_L A$.

Мосты между синтаксисом и семантикой

Определение

Логика L (локально) **полна**, если

для всякой формулы A имеем: $\vdash_L A \iff \models_L A$.

Определение

Логика L (локально) **полна**, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L A \iff B \models_L A$.

Эти два определения равносильны.

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) полна, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L A \iff B \models_L A$.

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) полна, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L A \iff B \models_L A$.

Определение (Глобальная полнота, ГП)

Логика L глобально полна, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L^* A \iff B \models_L^* A$.

Слабая полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Локальная полнота, ЛП)

Логика L (локально) **полна**, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L A \iff B \models_L A$.

Определение (Глобальная полнота, ГП)

Логика L **глобально полна**, если

для всяких формул A и B имеем: $B \vdash_L^* A \iff B \models_L^* A$.

Теперь заменим B на множество формул $\Gamma \mapsto$ **сильная** полнота.

Сильная полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Сильная локальная полнота, СЛП)

Логика L **сильно локально полна**, если

для всяких $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ и $A \in \text{Fm}$ имеем: $\Gamma \vdash_L A \iff \Gamma \vDash_L A$.

Сильная полнота логики: локальная и глобальная

Определение (Сильная локальная полнота, СЛП)

Логика L **сильно локально полна**, если

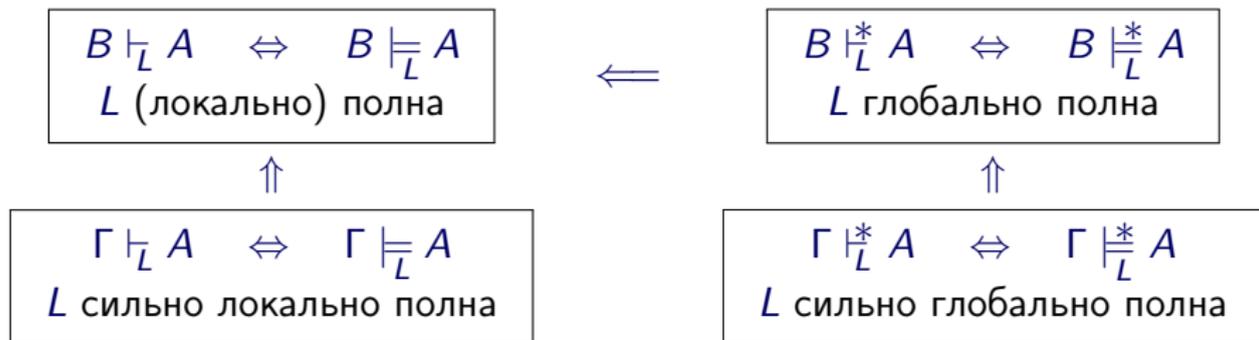
для всяких $\Gamma \subseteq F_m$ и $A \in F_m$ имеем: $\Gamma \vdash_L A \iff \Gamma \vDash_L A$.

Определение (Сильная глобальная полнота, СГП)

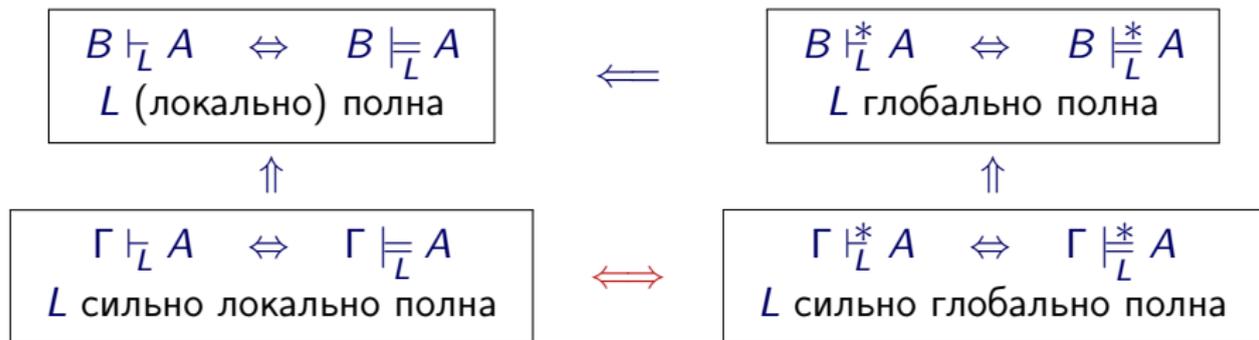
Логика L **сильно глобально полна**, если

для всяких $\Gamma \subseteq F_m$ и $A \in F_m$ имеем: $\Gamma \vDash_L^* A \iff \Gamma \vdash_L^* A$.

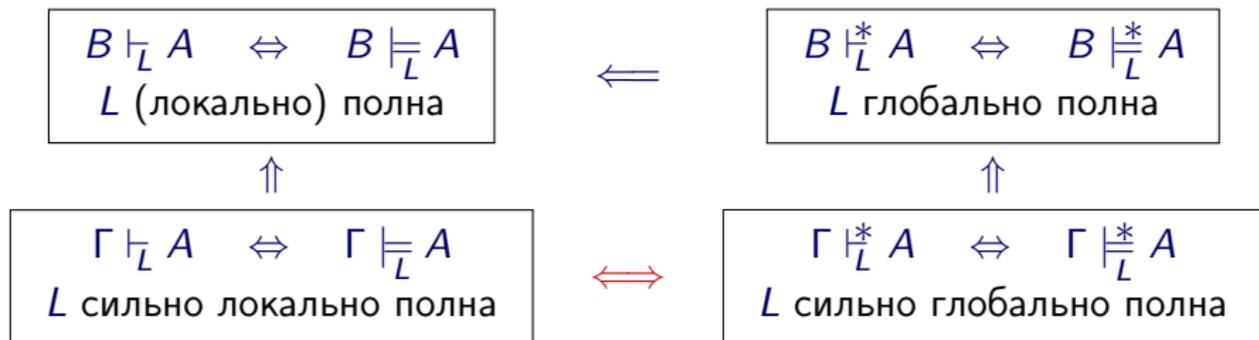
Все виды полноты на одной диаграмме



Все виды полноты на одной диаграмме



Все виды полноты на одной диаграмме

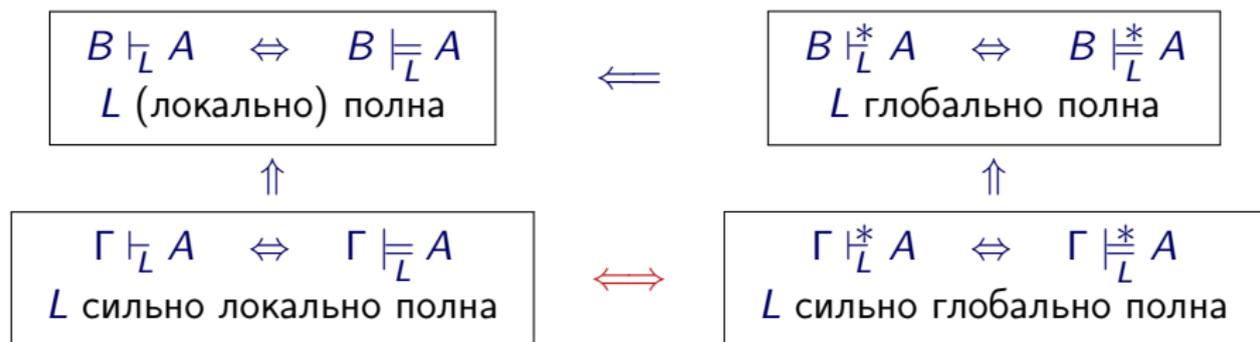


Теорема (СЛП = СГП)

Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда:

L сильно локально полна $\Leftrightarrow L$ сильно глобально полна.

Все виды полноты на одной диаграмме



Теорема (СЛП = СГП)

Пусть L — нормальная модальная логика. Тогда:

L сильно локально полна $\Leftrightarrow L$ сильно глобально полна.

Существуют логики, полные, но не сильно полные.

Пример: логика Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

(локально) полная логика L

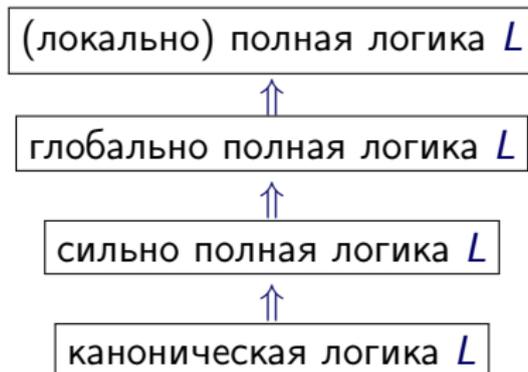


глобально полная логика L

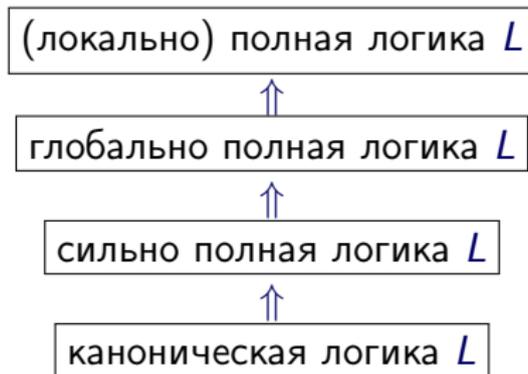


сильно полная логика L

Связь трех видов полноты с другими понятиями



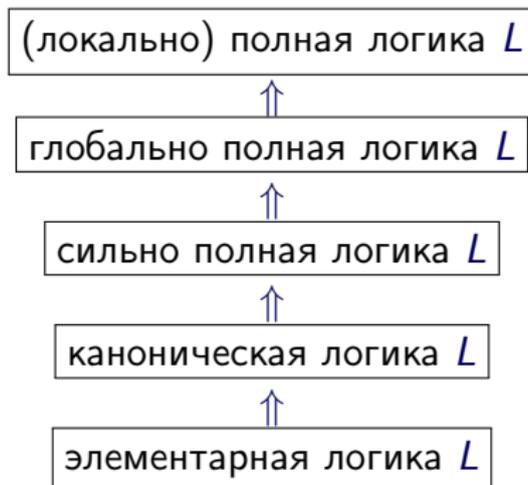
Связь трех видов полноты с другими понятиями



Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

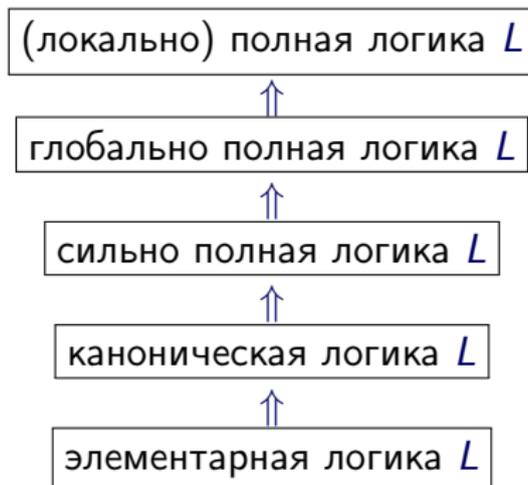
Связь трех видов полноты с другими понятиями



Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

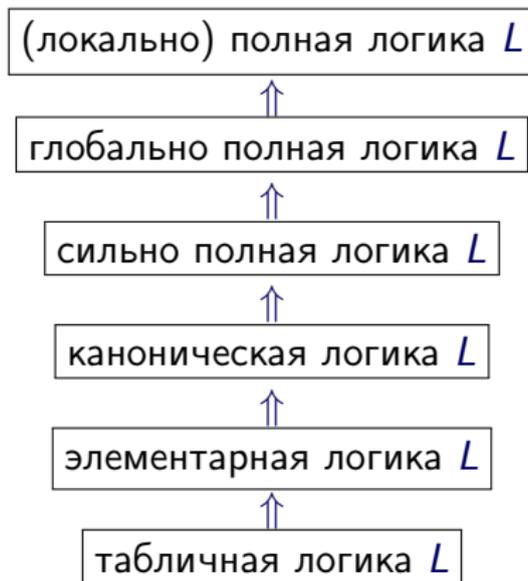


Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

L элементарная, если $L = \text{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал \mathbb{F} элементарен.

Связь трех видов полноты с другими понятиями

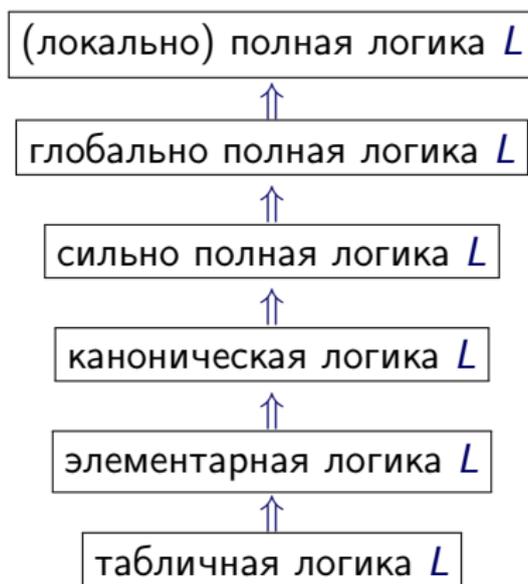


Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

L элементарная, если $L = \text{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал \mathbb{F} элементарен.

Связь трех видов полноты с другими понятиями



Определение

L каноническая, если она общ. на своей канонической шкале: $F_L \models L$.

L элементарная, если $L = \text{Logic}(\mathbb{F})$, где класс шкал \mathbb{F} элементарен.

L табличная, если $L = \text{Logic}(F)$ для некоторой конечной шкалы F .

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо “ L -модель” писать “модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал”, то будут получаться всевозможные понятия полноты логики **относительно такого-то класса шкал**.

Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо “ L -модель” писать “модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал”, то будут получаться всевозможные понятия полноты логики **относительно такого-то класса шкал**.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).

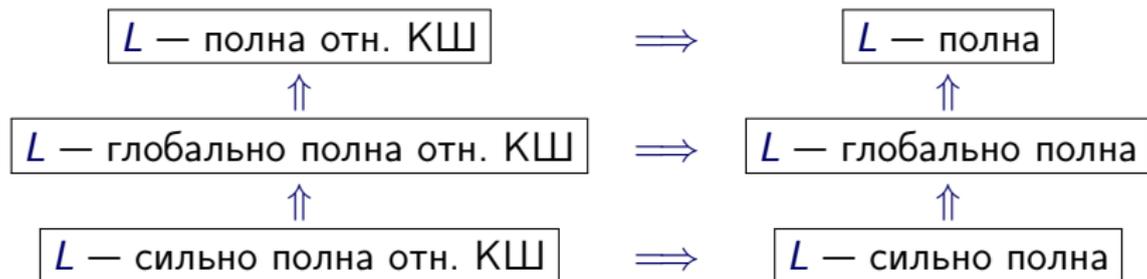
Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо “ L -модель” писать “модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал”, то будут получаться всевозможные понятия полноты логики **относительно такого-то класса шкал**.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).
- “Полноту относительно конечных шкал” еще называется **финитной аппроксимируемостью**: локальной, глобальной, сильной.

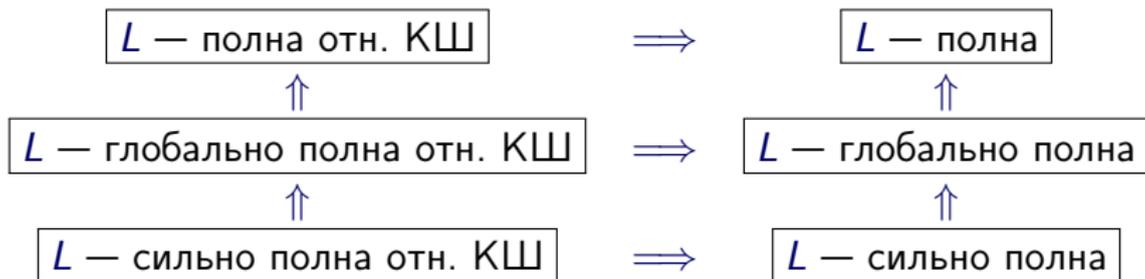
Полнота относительно конечных шкал

- Если вместо “ L -модель” писать “модель $M = (F, V)$ со шкалой F из такого-то класса шкал”, то будут получаться всевозможные понятия полноты логики **относительно такого-то класса шкал**.
- Наиболее интересен — класс конечных шкал (логики L).
- “Полноту относительно конечных шкал” еще называется **финитной аппроксимируемостью**: локальной, глобальной, сильной.
- Два вида **сильной** полноты над любым классом конечных шкал (замкнутым относительно порожденных подшкал) — совпадают:
$$\text{СЛП(конечные шкалы)} = \text{СГП(конечные шкалы)}.$$

Все виды полноты логики



Все виды полноты логики

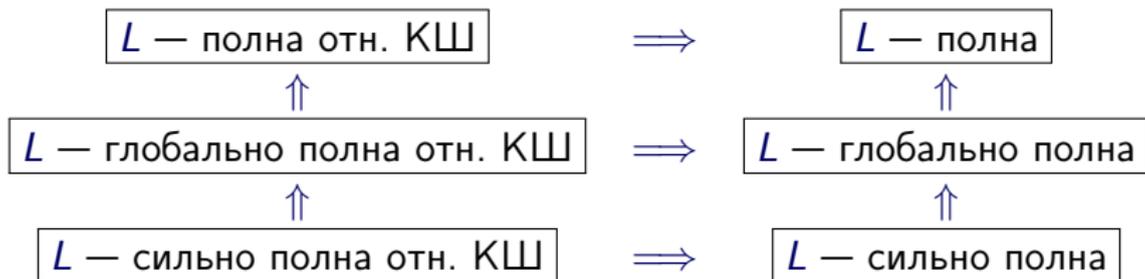


Теорема (Харроп, для локальной и глобальной Ф.А.)

Пусть $L = K \oplus C$ — конечно аксиоматизируемая логика.

- (1) Если L — полна отн. конечных шкал, то отношение локальной выводимости $B \vdash_L A$ разрешимо.

Все виды полноты логики

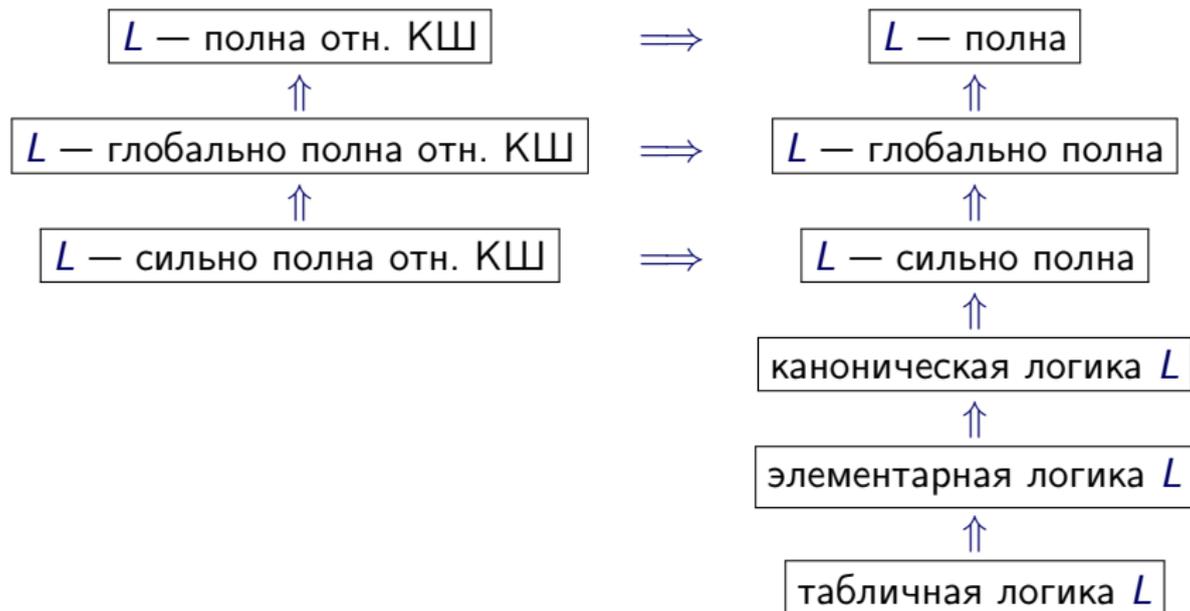


Теорема (Харроп, для локальной и глобальной Ф.А.)

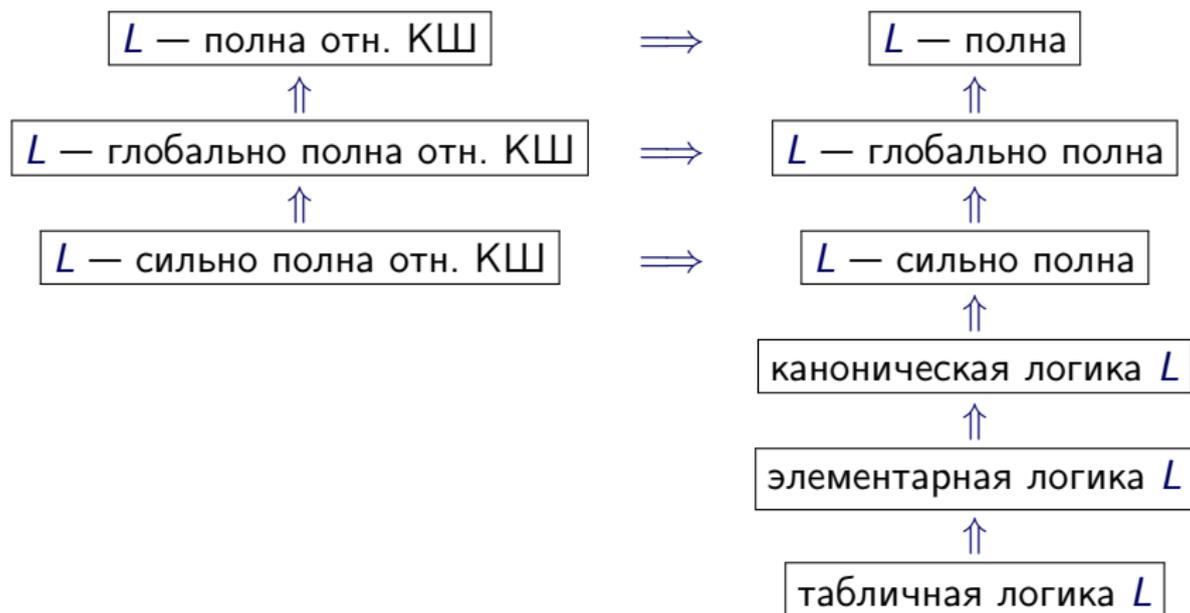
Пусть $L = K \oplus C$ — конечно аксиоматизируемая логика.

- (1) Если L — полна отн. конечных шкал, то отношение локальной выводимости $B \vdash_L A$ разрешимо.
- (2) Если L — глобально полна отн. конечных шкал, то отношение глобальной выводимости $B \vdash_L^* A$ разрешимо.

Все виды полноты логики

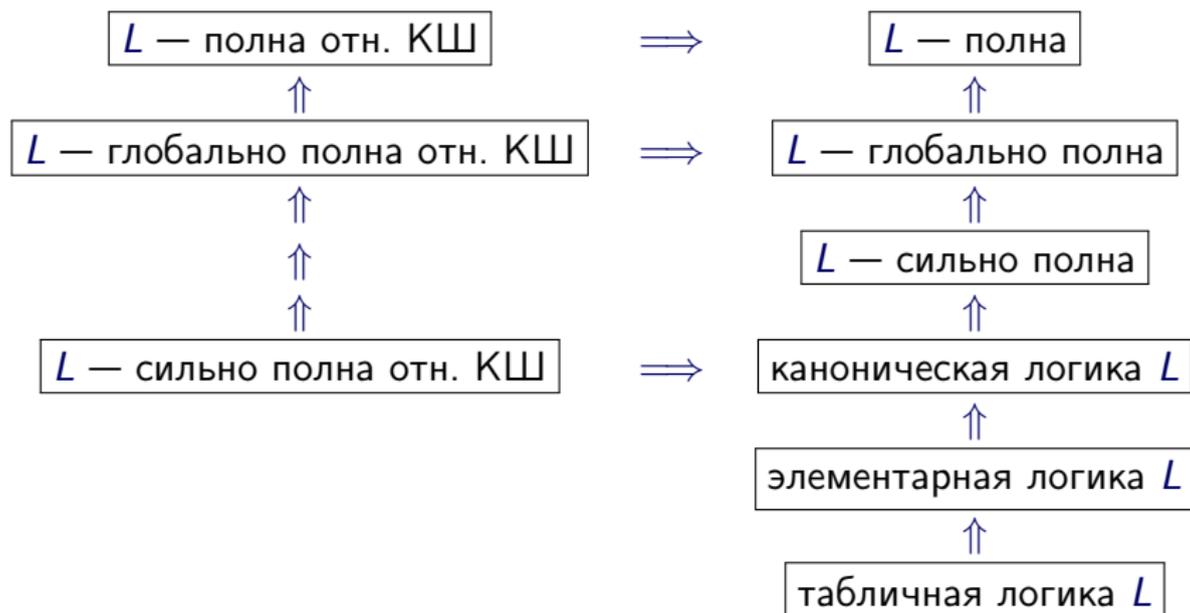


Все виды полноты логики



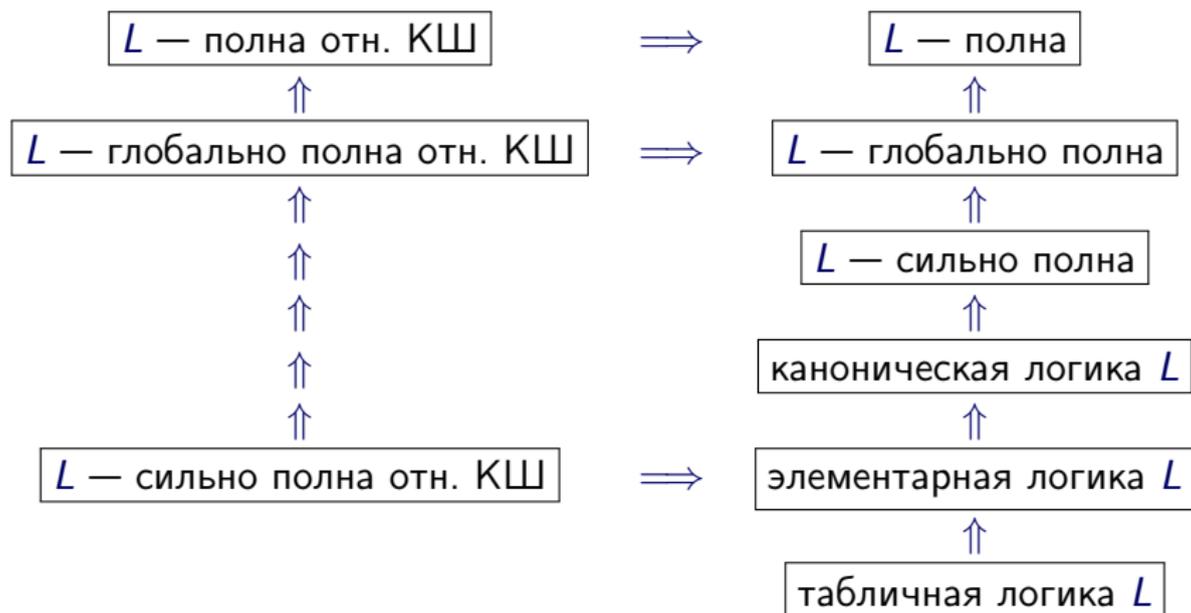
Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики



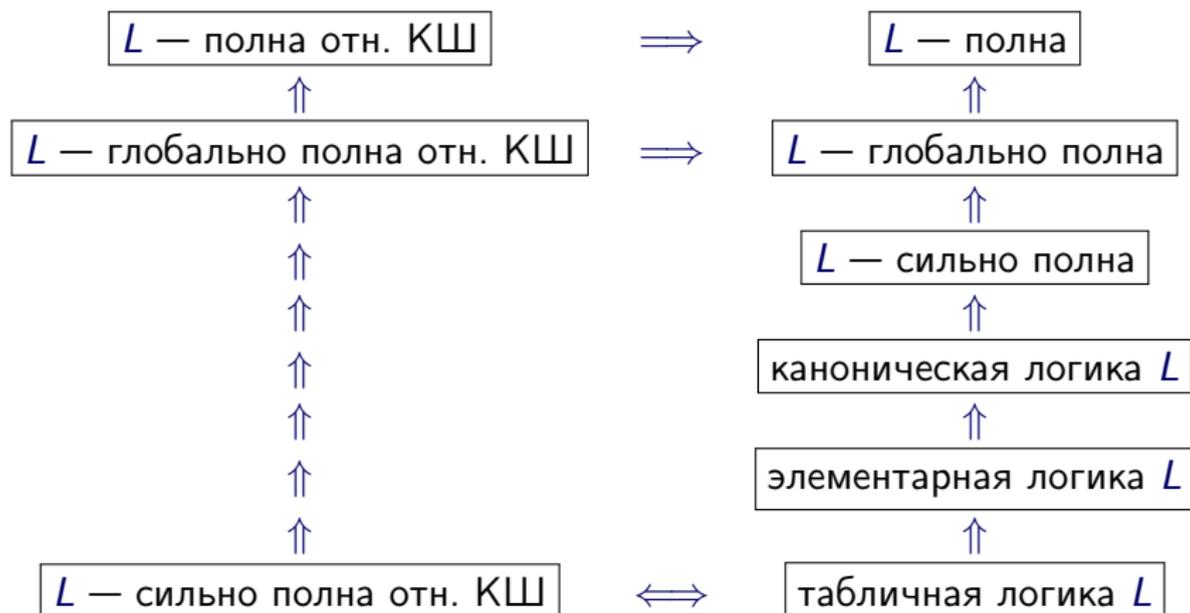
Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики



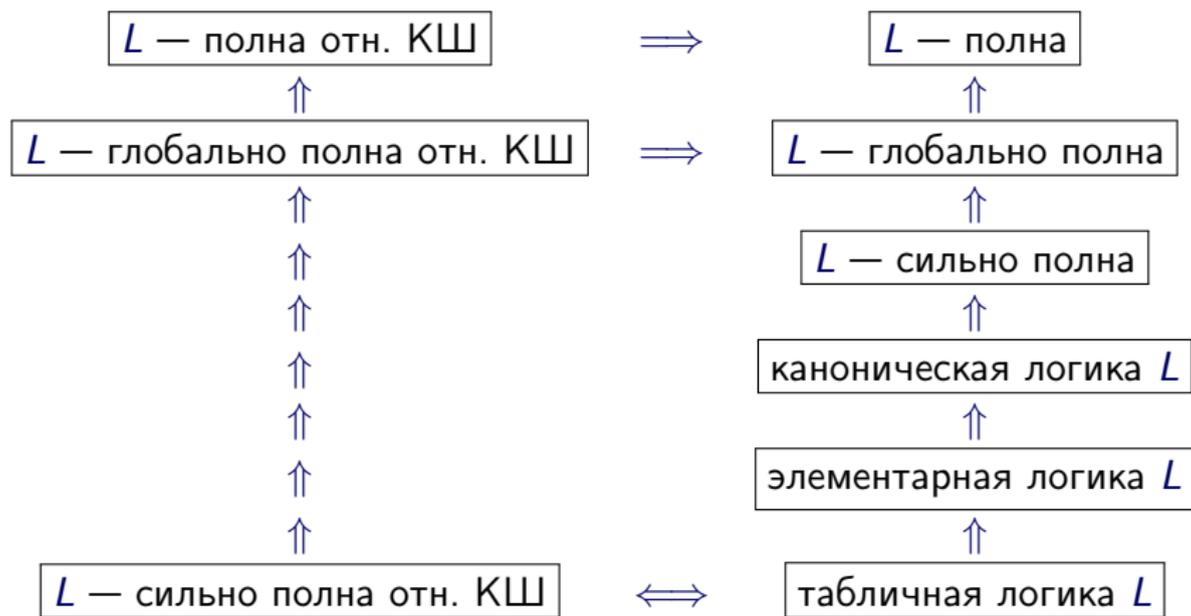
Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики



Вопрос: Какие логики сильно полны отн. своих конечных шкал?

Все виды полноты логики



Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

L — полна отн. конечных шкал \Leftrightarrow L — таблична.

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

L — полна отн. конечных шкал $\iff L$ — таблична.

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

L — полна отн. конечных шкал $\iff L$ — таблична.

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \text{Int}$ сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал $\iff L$ таблична.

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \text{Int}$ сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал $\iff L$ таблична.

Результат упомянут (Теорема 3.1.7, без док-ва) в книге:

- Одинцов С.П., Сперанский С.О., Дробышевич С.А. *Введение в неклассические логики*, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

Сравнение с супер-интуиционистскими логиками

Теорема (Е.З., 2019)

Пусть L — непротиворечивая нормальная модальная логика. Тогда

$$L \text{ — полна отн. конечных шкал} \iff L \text{ — таблична.}$$

Теорема (W. Dziobiak, 1980)

Суперинтуиционистская логика $L \supseteq \text{Int}$ сильно полна относительно какого-либо класса конечных шкал $\iff L$ таблична.

Результат упомянут (Теорема 3.1.7, без док-ва) в книге:

- Одинцов С.П., Сперанский С.О., Дробышевич С.А. *Введение в неклассические логики*, Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014.

Можно было бы ожидать его аналог для расширений модальной логики $S4$, то есть классов рефлексивных транзитивных шкал. Однако удалось получить его для произвольных модальных логик.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал \mathbb{F} называем *модально компактным*, если

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал \mathbb{F} называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал \mathbb{F} называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе \mathbb{F} ,
то и всё Γ выполнимо в классе \mathbb{F} .

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал \mathbb{F} называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе \mathbb{F} ,
то и всё Γ выполнимо в классе \mathbb{F} .

Это Теорема о компактности, применённая к данному классу шкал.

Связь с модальной компактностью классов шкал

Множество модальных формул $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ выполнимо в классе шкал \mathbb{F} , если существует \mathbb{F} -модель M и ее точка x , такие что $M, x \models \Gamma$.

Определение

Класс шкал \mathbb{F} называем *модально компактным*, если

для любого множества модальных формул Γ верно:

если каждое конечное подмножество $\Delta \subseteq \Gamma$ выполнимо в классе \mathbb{F} ,
то и всё Γ выполнимо в классе \mathbb{F} .

Это Теорема о компактности, применённая к данному классу шкал.

Пример

Всякий *элементарный* класс шкал — модально компактен.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, **ир**рефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, **иррефлексивные**, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых **модальной** формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики **GL**.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, **ир**рефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых **модальной** формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики **GL**.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. **не** компактны.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, **ир**рефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых **модальной** формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики **GL**.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. **не** компактны.
- Класс конечных **GL**-шкал — модально **не** компактен.

Примеры модально (не)компактных классов шкал

- Рефлексивные, транзитивные, **ир**рефлексивные, частичные порядки, шкалы с универс. отношением — мод. компактны.
- Не всегда класс шкал, задаваемых **модальной** формулой, модально компактен. Пример: аксиома логики **GL**.
- Классы конечных (всех, рефлексивных, транзитивных, симметричных, частично упоряд.) шкал — мод. **не** компактны.
- Класс конечных **GL**-шкал — модально **не** компактен.

Вопрос. У каких логик класс **конечных** шкал — модально компактен?

Теорема

Для всякого класса шкал \mathbb{F} , замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

- (1) класс шкал \mathbb{F} модально компактен,
- (2) отношение локального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}} A$ компактно,
- (3) отношение глобального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}}^* A$ компактно.

Теорема

Для всякого класса шкал \mathbb{F} , замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

- (1) класс шкал \mathbb{F} модально компактен,
- (2) отношение локального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}} A$ компактно,
- (3) отношение глобального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}}^* A$ компактно.

Теорема (Критерий сильной полноты логики)

Для всякой нормальной логики L и всякого класса шкал \mathbb{F} , замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал,

L сильно полна отн. \mathbb{F} \iff L полна отн. \mathbb{F} и
класс шкал \mathbb{F} модально компактен.

Теорема

Для всякого класса шкал \mathbb{F} , замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал, следующие условия равносильны:

- (1) класс шкал \mathbb{F} модально компактен,
- (2) отношение локального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}} A$ компактно,
- (3) отношение глобального следования $\Gamma \Vdash_{\mathbb{F}}^* A$ компактно.

Теорема (Критерий сильной полноты логики)

Для всякой нормальной логики L и всякого класса шкал \mathbb{F} , замкнутого отн. взятия порожденных (точкой) подшкал,

L сильно полна отн. \mathbb{F} \iff L полна отн. \mathbb{F} и
класс шкал \mathbb{F} модально компактен.

Следствие (Е.З., 2019)

Класс шкал логики $\text{Frames}(L)$ модально компактен у табличных логик и только у них.

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.
 - ▶ Говорят: класс GL -шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
- ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.
 - ▶ Говорят: класс GL -шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.
- Какова ситуация с **конечными** шкалами этой и других логик?

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.
 - ▶ Говорят: класс GL -шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.Какова ситуация с **конечными** шкалами этой и других логик?

- 2 Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.
 - ▶ Говорят: класс GL -шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

Какова ситуация с **конечными** шкалами этой и других логик?

- 2 Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?
- 3 Есть ли аналоги этих результатов для модальных и интуиционистских **предикатных** логик?

Дальнейшие направления исследований

- 1 Что происходит в логиках с конечным числом переменных?
Логика доказуемости Гёделя – Лёба: $GL = K + \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$.
Её шкалы — транзитивные без бесконечно возрастающих цепей.
 - ▶ Модальной компактности этого класса нет, если разрешать в модальных формулах использовать хотя бы одну переменную.
 - ▶ Если же рассматривать **замкнутые** модальные формулы, то теорема о компактности в классе GL -шкал верна.
 - ▶ Говорят: класс GL -шкал модально 1-компактен, но не 2-компактен.

Какова ситуация с **конечными** шкалами этой и других логик?

- 2 Какова ситуация с суперинтуиционистскими логиками?
- 3 Есть ли аналоги этих результатов для модальных и интуиционистских **предикатных** логик?

Спасибо!