

Исчисление Ламбека с операциями следования и предшествования

Научный руководитель – Пентус Мати Рейнович

Пшеницын Тихон Григорьевич

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: ptihon@yandex.ru

Исчисление Ламбека — логический формализм, введенный в Lambek 1958, применяемый для описания синтаксиса естественных языков. В данной работе вводится новое расширение данного исчисления — с помощью операций следования S и предшествования P ; оно называется *исчислением Ламбека с операциями следования и предшествования* и обозначается в данной работе как $L_{S,P}$. В работе изучаются различные аспекты нового исчисления: структурные свойства, распознающая сила грамматик и теоретико-модельные вопросы.

Типы исчисления определяются так: $Tp := Pr \mid (Tp \backslash Tp) \mid (Tp / Tp) \mid (Tp \cdot Tp) \mid S(Tp) \mid P(Tp)$. Секвенции имеют вид $\langle n \rangle A_1, \dots, A_m \rightarrow A$, где A_j, A — типы, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 0$), $m > 0$. Число n является внутренним параметром секвенции.

Единственная аксиома $L_{S,P}$ имеет вид $\langle 0 \rangle p \rightarrow p$, $p \in Pr$.

Правила имеют следующий вид (здесь $m, n \geq 0$, $k > 0$):

$$\begin{array}{l} \frac{\langle n \rangle \Gamma, B, \Delta \rightarrow C \quad \langle m \rangle \Pi \rightarrow A}{\langle m+n \rangle \Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow) \qquad \frac{\langle n \rangle A, \Pi \rightarrow B}{\langle n \rangle \Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash) \\ \frac{\langle n \rangle \Gamma, B, \Delta \rightarrow C \quad \langle m \rangle \Pi \rightarrow A}{\langle m+n \rangle \Gamma, B/A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow) \qquad \frac{\langle n \rangle \Pi, A \rightarrow B}{\langle n \rangle \Pi \rightarrow B/A} (\rightarrow /) \\ \frac{\langle n \rangle \Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\langle n \rangle \Gamma, A \cdot B, \Delta \rightarrow C} (\cdot \rightarrow) \qquad \frac{\langle n \rangle \Gamma \rightarrow A \quad \langle m \rangle \Delta \rightarrow B}{\langle m+n \rangle \Gamma, \Delta \rightarrow A \cdot B} (\rightarrow \cdot) \\ \frac{\langle k \rangle \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\langle k-1 \rangle \Gamma, S(B), \Delta \rightarrow C} (S \rightarrow) \qquad \frac{\langle n \rangle \Pi \rightarrow C}{\langle n+1 \rangle \Pi \rightarrow S(C)} (\rightarrow S) \\ \frac{\langle n \rangle \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\langle n+1 \rangle \Gamma, P(B), \Delta \rightarrow C} (P \rightarrow) \qquad \frac{\langle k \rangle \Pi \rightarrow C}{\langle k-1 \rangle \Pi \rightarrow P(C)} (\rightarrow P) \end{array}$$

Примеры.

- 1) Секвенция $\langle 0 \rangle p \rightarrow P(S(p))$ выводима, а секвенция $\langle 0 \rangle p \rightarrow S(P(p))$ — нет. Отметим, что секвенция $\langle 0 \rangle \Pi \rightarrow A$ может быть отождествлена с $\Pi \rightarrow A$ и что в соответствии с этим отождествлением исчисление Ламбека консервативно в $L_{S,P}$.
- 2) $L_{S,P} \vdash S(p \cdot q) \leftrightarrow S(p) \cdot q$, $L_{S,P} \vdash P(p) \cdot q \rightarrow P(p \cdot q)$, но $L_{S,P} \not\vdash P(p \cdot q) \rightarrow P(p) \cdot q$.
- 3) $L_{S,P} \vdash P(p/q) \leftrightarrow p/S(q)$, $L_{S,P} \vdash S(p/q) \rightarrow p/P(q)$, но $L_{S,P} \not\vdash p/P(q) \rightarrow S(p/q)$.

Найдены примеры и других выводимых и невыводимых секвенций, объясняющие принципы работы операций S и P и описывающие их взаимодействие с остальными операциями.

Установлена теорема об устранимости сечения:

Теорема 1. В $L_{S,P}$ допустимо правило сечения:

$$\frac{\langle m \rangle \Pi \rightarrow A \quad \langle n \rangle \Gamma, A, \Delta \rightarrow B}{\langle m+n \rangle \Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow B} (\text{cut})$$

Исследован вопрос моделей, обобщено понятие полугруппы для операций S и P :

Определение 1. Полугруппа с делением и следованием — структура

$$RSS = \langle M, \circ, \leq, \backslash, /, \sigma, \pi \rangle, \text{ где}$$

- $\langle M, \circ, \leq, \backslash, / \rangle$ — полугруппа с делением;
- $\sigma(a \circ b) = \sigma(a) \circ b = a \circ \sigma(b)$ (ассоциативность);
- $a \leq b \Rightarrow \sigma(a) \leq \sigma(b)$ (монотонность);
- $\sigma(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq \pi(b)$ (residuated pair; см. Moortgat 1996).

Определение 2. Модель $L_{S,P}$ на полугруппе с делением и следованием RSS — функция $w : Tp \rightarrow M$, такая, что

- $w(A/B) = w(A)/w(B)$;
- $w(B \backslash A) = w(B) \backslash w(A)$;
- $w(A \cdot B) = w(A) \circ w(B)$;
- $w(S(A)) = \sigma(w(A))$;
- $w(P(A)) = \pi(w(A))$.

Секвенция $\langle n \rangle A_1, \dots, A_m \rightarrow A$ истинна в данной модели, если $w(S^n(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)) \leq w(A)$.

Теорема 2. Исчисление $L_{S,P}$ корректно и полно относительно моделей на полугруппах с делением и следованием, причем существует универсальная модель.

Тем самым, показано, что новый вариант исчисления Ламбека основан на естественных алгебраических структурах.

Исследован вопрос определения и распознающей силы категориальных грамматик. Для работы с новым исчислением предлагается модифицировать понятие слова и называть обобщенным словом пару $(n; a_1 \dots a_m) \in \mathbb{N} \times \Sigma^*$.

Определение 3. Категориальная грамматика над исчислением $L_{S,P}$ — структура вида $\langle \Sigma, S, \triangleright \rangle$, где Σ — конечный алфавит, S — тип из $L_{S,P}$, $\triangleright \subseteq \Sigma \times Tp$ — конечное бинарное отношение. Данная грамматика порождает язык обобщенных слов $(n; a_1 \dots a_m)$, таких, что существуют типы $T_i \in Tp$, для которых выполняется $a_i \triangleright T_i$ и $L_{S,P} \vdash \langle n \rangle T_1 \dots T_m \rightarrow S$.

Из языка LG обобщенных слов путем их проецирования на вторую компоненту можно получить язык обычных слов; обозначим его $\pi_2(LG)$. Имеет место

Теорема 3. Существует категориальная грамматика над исчислением $L_{S,P}$, задающая язык обобщенных слов LG , такой, что $\pi_2(LG) = \{a^n b^n c^k \mid n > 0, k \leq n\}$ (данный язык не контекстно-свободен).

Тем самым, теорема Пентуса для $L_{S,P}$ не выполняется.