Предикатный вариант объединённой логики задач и высказываний

Оноприенко Анастасия

МГУ им. М.В.Ломоносова

Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2020»

18.11.2020

Логика QHC

Основная идея логики QHC – связать между собой классическое исчисление предикатов и интуиционистское исчисление предикатов.

Классическая логика удобна для рассуждений о теоремах (там, где требуется доказательство).

Интуиционистская логика удобна для рассуждений о задачах (там, где требуется построение объекта).

Язык логики QHC

Термы – индивидные переменные $x_1, x_2, \ldots$ (они не принадлежат ни к какому сорту).

Предикатные переменные двух сортов –
сорта высказывание $(p, q, \ldots)$ и сорта задача $(\alpha, \beta, \ldots)$.

Формулы логики QHC строим из переменных, используя:

- классические связки $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ и кванторы $\forall, \exists$, которые могут применяться только к формулам сорта высказывание;
- классические истина (1) и ложь (0);
- интуиционистские связки $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ и кванторы $\forall, \exists$, которые могут применяться только к формулам сорта задача;
- интуиционистские истина $(\top)$ и ложь $(\perp)$.

Все эти связки и кванторы не меняют сорт формул!

Язык логики QHC

Язык логики QHC содержит две модальности: ? и !, которые меняют сорт формул.

- Модальность ! применяется к формулам сорта высказывание, на выходе получается формула сорта задача.
  Неформально, задача $!p$ – это «найди доказательство высказывания p».
- Модальность ? применяется, наоборот, к формулам сорта задача, на выходе получается формула сорта высказывание.
  Неформально, высказывание $?\alpha$ – это «существует решение задачи α».

Аксиомы и правила вывода QHC

- Все аксиомы и правила вывода классической логики предикатов.
- Все аксиомы и правила вывода интуиционистской логики предикатов.
- Следующие дополнительные аксиомы и правила вывода:

$!(p \to q) \to (!p \to !q)$;

$\dfrac{p}{!p}$;

$?!p \to p$;

$\neg !0$.

$?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$;

$\dfrac{\alpha}{?\alpha}$;

$\alpha \to !?\alpha$;

Семантика Крипке логики QHC

Определение

Шкалы Крипке с проверяющими мирами – это тройка $(W, \preccurlyeq, Aud)$, *где* $(W, \preccurlyeq)$ *– множество с определённым на ним частичным порядком,* $Aud \subseteq W$, *и выполнено следующее свойство:*

$$\forall a \in W \ \exists b \in W (a \preccurlyeq b \wedge b \in Aud).$$

Семантика Крипке логики QHC

- Модель Крипке с проверяющими мирами логики QHC – шкала Крипке с функцией D, которая каждому $a \in W$ сопоставляет непустое множество D_a, а также оценкой атомов $\models$.
- Если $a \preccurlyeq b$, то $D_a \subseteq D_b$.
- Определяем оценку атомов $\models$.
  Если $a \models A(x_1, \ldots, x_n)$, то $x_1, \ldots, x_n \in D_a$.
- Атомы сорта задача могут быть истинны или ложны в любом мире множества W. Атомы (и другие формулы) сорта высказывание могут быть истинны или ложны только в мирах из множества Aud.
- Монотонность: если $a \models \alpha(x_1, \ldots, x_n)$ и $a \preccurlyeq b$, то $b \models \alpha(x_1, \ldots, x_n)$.

Семантика Крипке логики QHC

- Оценки для классических связок и кванторов в мирах Aud определяются естественным образом.
- Оценки для интуиционистких связок в мирах W определяются как в обычных шкалах Крипке интуиционистской логики высказываний. Для интуиционистких кванторов:

$$a \models \exists x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \exists v \in D_a\ a \models \alpha(v);$$
$$a \models \forall x\ \alpha(x) \Leftrightarrow \forall b \succcurlyeq a\ \forall v \in D_b\ b \models \alpha(v).$$

- Для модальностей:

$$a \models ?\alpha \Leftrightarrow a \models \alpha \text{ (для } a \in \mathrm{Aud})$$
$$a \models !p \Leftrightarrow \forall b \in \mathrm{Aud}(a \preccurlyeq b \Rightarrow b \models p) \text{ (для } a \in W).$$

Шкалы Крипке с проверяющими мирами

Теорема (о корректности)

Если замкнутая формула языка Ω выводима в QHC, то она истинна в любой модели Крипке для языка Ω.

Теорема (о полноте)

Если формула A языка Ω истинна в любой модели Крипке с проверяющими мирами для языка Ω, то A выводима в QHC.

Дизъюнктивное и экзистенциальное свойства

Теорема

Если $QHC \vdash \alpha \vee \beta$*, то* $QHC \vdash \alpha$ *или* $QHC \vdash \beta$*.*

Теорема

Пусть сигнатура Ω *содержит хотя бы одну константу. Тогда, если в этой сигнатуре* $QHC \vdash \exists x \alpha(x)$*, то существует константа* c *такая, что* $QHC \vdash \alpha(c)$*.*

Логики QS4 и QH4

2 производные модальности в логике QHC:

$\Box$ =?! ($\Box p$ можно читать как «p доказуемо»);

∇ =!? ($\nabla\alpha$ можно читать как «доказать, что существует решение задачи α»).

В QHC выводимо:

$\Box p \to p$;

$\Box p \to \Box\Box p$;

$\dfrac{p}{\Box p}$;

$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$.

Это аксиомы QS4!

$\alpha \to \nabla\alpha$;

$\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;

$\nabla\bot \to \bot$;

$\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Это аксиомы QH4!

Семантика Крипке логики QH4

Шкалы Крипке с проверяющими мирами могут быть обогащены до моделей логики QH4. Отличия от моделей логики QHC:

- Формулы только одного сорта, поэтому любая формула может быть истинной или ложной в любом мире.
- Необходимо определить истинность для модальности ∇: $a \models \nabla\varphi \Leftrightarrow \forall b \in W(a \preccurlyeq b \wedge b \in \mathrm{Aud} \Rightarrow b \models \varphi)$.

Имеет место теорема о корректности и полноте логики QH4 относительно данной семантики.

Консервативность

Теорема

Логика QHC – консервативное расширение классической логики предикатов, интуиционистской логики предикатов, логики QS4 и логики QH4.

Спасибо за внимание!