V-реализуемость и интуиционистская логика

А. Ю. Коновалов

Механико-математический факультет
МГУ им. М.В.Ломоносова

XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»
Москва, 2020

V-функции

Пусть V — множество частичных функций на $\mathbb{N}$.

Пусть задано множество индексов $\mathrm{I}_n \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, обладающим следующими свойствами:

- $z \in \mathrm{I}_n \;\mapsto\; \varphi_z^n$ — n-местная V-функция;
- если ψ — n-местная V-функция, то $\psi = \varphi_z^n$ для некоторого $z \in \mathrm{I}_n$.

$\mathrm{c}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция нумерации пар,

$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2$ — обратные функции: $\mathrm{p}_1(\mathrm{c}(x, y)) = x$ и $\mathrm{p}_2(\mathrm{c}(x, y)) = y$.

I_i^n — функции проекций: $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Будем писать $\mathrm{p}_1 t',\ \mathrm{p}_2 t''$ вместо $\mathrm{p}_1(t'),\ \mathrm{p}_2(t'')$.
Вместо $\varphi_z^n(x_1, \ldots, x_n)$ будем писать $\varphi_z(x_1, \ldots, x_n)$.

Условия на множество функций V

1. V содержит функции c, p_1, p_2, I_i^n;
2. $\exists\, s \in V : \varphi_{s(k)} \simeq k$ для всех k;
3. $\forall n \forall m_1 \ldots \forall m_n \,\exists\, s \in V :$ для всех $e \in \mathrm{I}_n, e_1 \in \mathrm{I}_{m_1}, \ldots, e_n \in \mathrm{I}_{m_n}$

   $$\varphi_{s(e,e_1,\ldots,e_n)}(x_1,\ldots,x_m) \simeq \varphi_e(\varphi_{e_1}(x_1,\ldots,x_{m_1}),\ldots,\varphi_{e_n}(x_1,\ldots,x_{m_n})),$$

   где $m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} m_i$;
4. $\forall n \,\exists\, s \in V :$ для всех $e_1, e_2 \in \mathrm{I}_{n+1}$ имеет место

   $$\varphi_{s(e_1,e_2)}(x_1,\ldots,x_n,z) \simeq \begin{cases} \varphi_{e_1}(x_1,\ldots,x_n,z), & \text{если } \mathsf{p}_1 z = 0; \\ \varphi_{e_2}(x_1,\ldots,x_n,z), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Язык логики предикатов

- предикатные символы P_i^n $(i, n \geqslant 0)$;
- константы $0, \ 1, \ 2, \ \dots$;
- переменные $x_1, \ x_2, \ \dots$;
- логические константы $\bot$, $\top$;
- логические связки $\wedge$, $\vee$, $\to$;
- кванторы $\forall$, $\exists$.
- скобки $($, $)$.

Оценки предикатного языка

n-местным обобщенным предикатом на множестве $\mathbb{N}$ назовем всякую тотальную функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$.

Если $\mathcal{P}$ — n-местный обобщенный предикат, то $\mathcal{P}(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathbb{N}$.

Оценкой назовем произвольное отображение, которое каждому n-местному предикатному символу языка логики предикатов ставит в соответствие n-местный обобщенный предикат.

V-реализуемость относительно оценки ($e \ \mathbf{r}_f^V \ A$)

- неверно $e \ \mathbf{r}_f^V \ \bot$, и верно $e \ \mathbf{r}_f^V \ \top$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathrm{p}_1 e \ \mathbf{r}_f^V \ \Phi$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_f^V \ \Psi$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathrm{p}_1 e = 0$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_f^V \ \Phi)$ или $(\mathrm{p}_1 e = 1$ и $\mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_f^V \ \Psi)$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ \exists x \, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathrm{p}_2 e \ \mathbf{r}_f^V \ \Phi(\mathrm{p}_1 e)$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ \forall x_1, \ldots, x_n \, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathrm{I}_{n+1}$ и для всех натуральный чисел $s, \ a_1, \ldots, a_n$, если $s \ \mathbf{r}_f^V \ \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то $\varphi_e(a_1, \ldots, a_n, s) \ \mathbf{r}_f^V \ \Psi(a_1, \ldots, a_n)$;
- $e \ \mathbf{r}_f^V \ \forall x_1, \ldots, x_n \, \Phi \rightleftharpoons e \ \mathbf{r}_f^V \ \forall x_1, \ldots, x_n \, (\top \to \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Варианты V-реализуемости

Пусть A — замкнутая предикатная формула.

$$A \text{ — равномерно } V\text{-реализуема} \rightleftharpoons \exists e \forall f \,(e \ \mathbf{r}_f^V \ A)$$

$$A \text{ — слабо } V\text{-реализуема} \rightleftharpoons \forall f \,\exists e \,(e \ \mathbf{r}_f^V \ A)$$

Базисное исчисление предикатов BQC введено Руйтенбургом.

Теорема

Базисная логика BQC корректна относительно равномерной V-реализуемости.

Основной результат

Теорема

Следующие утверждения эквивалентны.

- *Интуиционистская логика корректна относительно семантики равномерной V-реализуемости;*
- *Формула* $\forall x\,(Q(x) \to \forall y\,(R(x,y) \to \exists z\,P(x,y,z))) \to \forall y\,\forall x\,(Q(x) \wedge R(x,y) \to \exists z\,P(x,y,z))$ *является слабо V-реализуемой;*
- *Найдется такая двухместная V-функция ψ, что*

$$!\varphi_e(a) \Longrightarrow\ !\psi(e,a) \text{ и } \psi(e,a) = \varphi_e(a)$$

для всех a и $e \in \mathsf{I}_1$.