Об изоморфизмах алгебр доказуемости формальных теорий

Евгений Колмаков

kolmakov-ea@yandex.ru

МГУ им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математической логики и теории алгоритмов

Научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых
“Ломоносов 2020”

Москва, Россия

18 ноября, 2020

Арифметические теории

Рассматриваем теории в языке $0, (\cdot)', +, \times, \exp$.
Арифметическая иерархия формул:

- $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0(\exp) =$ ограниченные формулы,
- $\varphi \in \Pi_n \Rightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_k\, \varphi \in \Sigma_{n+1}$,
- $\psi \in \Sigma_n \Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi \in \Pi_{n+1}$.

Элементарная арифметика арифметика Пеано

$$\mathsf{EA} \equiv \mathsf{I}\Delta_0(\exp) \subseteq \mathsf{EA}^+ \subseteq \mathsf{PRA} \subseteq \mathsf{I}\Sigma_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{PA} \equiv \bigcup_{m \in \omega} \mathsf{I}\Sigma_m.$$

$\mathsf{EA}^+ := \mathsf{EA} + \forall x, y\, \exists z\, 2^x_y = z$, где $2^x_0 := 2^x$ и $2^x_{y+1} := 2^{2^x_y}$.
$\mathsf{I}\Gamma :=$ схема аксиом индукции для Γ-формул с параметрами.

$T \subseteq S \Leftrightarrow$ каждая теорема T является теоремой S
$T \equiv S \Leftrightarrow T$ и S дедуктивно эквивалентны
$T \equiv_\Gamma S \Leftrightarrow T$ и S доказывают одни и те же Γ-предложения

Предикат доказуемости

Каждая теория T (р.п. Σ_1-корректное расширение EA) задаётся $\Delta_0(\exp)$-формулой $\mathrm{Ax}_T(x)$, определяющей множество аксиом теории T в стандартной модели $\mathbb{N}$.

Предикат доказательства (связанный $\mathrm{Ax}_T(x)$)

$\mathrm{Prf}_T(p,x)$:= p есть код T-доказательства формулы φ, где $x = \ulcorner\varphi\urcorner$.

Стандартный предикат доказуемости для T

$$\Box_T(x) := \exists p\, \mathrm{Prf}_T(p,x).$$

Предикат $\Box_T$ удовлетворяет условиям Гильберта-Бернайса-Лёба и обладает свойством доказуемой Σ_1-полноты.

Алгебра Линденбаума-Тарского $\mathcal{L}_T$ теории T

$$\mathcal{L}_T = (\{[\varphi]_{\sim_T}\}, \wedge, \vee, \neg), \text{ где } \varphi \sim_T \psi \iff T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Все такие алгебры являются счётными и безатомными (следствие теоремы Гёделя-Россера), поэтому они изоморфны и даже рекурсивно изоморфны (Крипке, Пур-Эль, 1967).

Алгебра доказуемости $\mathcal{M}_T$ для теории T с предикатом доказуемости $\Box_T$

$$\mathcal{M}_T = (\mathcal{L}_T, \Box_T).$$

Теорема (Соловей, 1976). Если теория T Σ_1-корректна, то для любой (модальной) формулы $A(\vec{p})$

$$\mathrm{GL} \vdash A(\vec{p}) \iff \mathcal{M}_T \models \forall \vec{p}\,(A(\vec{p}) = \top)\,.$$

Результаты В. Ю. Шаврукова об изоморфизмах

Схема равномерной Σ_1-рефлексии $\mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(T)$

$$\forall x \; (\Box_T \varphi(\underline{x}) \to \varphi(x)) \,, \quad \varphi(x) \in \Sigma_1 .$$

Теорема (Шаврукова, 1993).

$$T \vdash \mathrm{RFN}_{\Sigma_1}(S) \Longrightarrow \mathcal{M}_T \ncong \mathcal{M}_S .$$

Примеры: $(\mathrm{EA}, \mathrm{PA})$, $(\mathrm{PA}, \mathrm{ZF})$, $(\mathrm{EA}, \mathrm{EA}^+)$, $(\mathrm{I}\Sigma_1, \mathrm{I}\Sigma_2)$.

Теорема (Шаврукова, 1997).

$$T \sim_{\mathcal{B}(\Sigma_1)} S \Longrightarrow \mathcal{M}_T \cong \mathcal{M}_S \quad \text{(рекурсивно изоморфны).}$$

Примеры: $(\mathrm{PRA}, \mathrm{I}\Sigma_1)$, $(\mathrm{I}\Sigma_n, \mathrm{B}\Sigma_{n+1})$, $(\mathrm{PA}, \mathrm{ACA}_0)$, $(\mathrm{ZF}, \mathrm{GB})$.

Усиления, полученные Г. Адамссоном

Определим функцию Σ_1-рефлексии следующим образом

$$\mathcal{R}_T(x) := \min\{y \in \mathbb{N} \mid \forall \delta \in \Delta_0(\exp)\,(T \vdash_x \exists z\, \delta(z) \Longrightarrow \exists m \leqslant y\, \delta(m))\},$$

Значение функции $\mathcal{R}_T(x)$ есть (точная) верхняя граница для свидетелей Σ_1-предложений, доказуемых в T доказательствами длины, не превосходящей x (содержащими не более x символов).

Теорема (Адамссон, 2011).

$$\mathcal{M}_T \cong \mathcal{M}_S \Longrightarrow \exists t \in \mathcal{E}^3\, \exists^\infty n\left(\mathcal{R}_T(n) < t(\mathcal{R}_S^{(4)}(n))\right).$$

Неформально, $\mathcal{R}_T$ не может расти слишком быстро по отношению к $\mathcal{R}_S$.

Теорема (Адамссон, 2011). Заключение предыдущей теоремы верно, если существует сюръективный гомоморфизм из $\mathcal{M}_T$ на $\mathcal{M}_S$.

Теорема (Адамссон, 2011). $(\mathcal{L}_T, \Box_T) \ncong (\mathcal{L}_T, \Box_T^{(6)})$.

В частности, $\mathcal{M}_T$ зависит от конкретной аксиоматизации T.

Уточнение верхней оценки Адамссона

Как было отмечено Адамссоном, полученная им верхняя оценка "не является оптимальной" и "можно надеяться на то, чтобы заменить $\Box_T^{(6)}$ более естественным $\Box_T\Box_T$".

Утверждение (К.). $\mathcal{M}_T \cong \mathcal{M}_S \Longrightarrow \exists^\infty n \left(\mathcal{R}_T(n) < \mathcal{R}_S^{(2)}(n)\right)$.
Более того, в этом случае для каждого $k > 0$ имеет место

$$\exists^\infty n \left(\mathcal{R}_T^{(k)}(n) < \mathcal{R}_S^{(k+1)}(n)\right).$$

Следствие (К.). Для любых $0 < p < q$

$$(\mathcal{L}_T, \Box_T^{(p)}) \not\cong (\mathcal{L}_T, \Box_T^{(q)}).$$

В частности, $(\mathcal{L}_T, \Box_T) \not\cong (\mathcal{L}_T, \Box_T\Box_T)$.

Схема локальной Σ_1-рефлексии $\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)$

$$\Box_T\varphi \to \varphi, \quad \varphi \text{ есть } \Sigma_1\text{-предложение.}$$

Наблюдение (К.). $\mathcal{R}_{T+\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)}(x)$ мажорирует любую конечную итерацию функции $\mathcal{R}_T(x)$. Более точно, $\mathcal{R}_{T+\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)}(x)$ имеет такой же порядок роста, как и $(\mathcal{R}_T)'(x) := \mathcal{R}_T^{(x+1)}(x)$ (с точностью до элементарного преобразования входа).

Следствие (К.). Если $T \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(S)$, доказуемо в EA, то

$$\mathcal{M}_T \not\cong \mathcal{M}_S.$$

В частности, $\mathcal{M}_T \not\cong \mathcal{M}_{T+\mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(T)}$.

Другие примеры

Доказуемо в EA^+ имеет место следующая эквивалентность

$$\mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+) \equiv_{\Sigma_2} \mathsf{EA}^+ + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+).$$

Применяя упомянутое выше наблюдение и теорему Шаврукова об изоморфизме, получаем

$$\mathcal{M}_{\mathsf{EA}^+} \ncong \mathcal{M}_{\mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+)} \cong \mathcal{M}_{\mathsf{EA}^+ + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+)}.$$

Таким образом, две теории могут иметь одинаковые (различные) классы д.т.в.ф., имея при этом неизоморфные (изоморфные) алгебры доказуемости:

$$\mathcal{E}^4 = \mathcal{F}(\mathsf{EA}^+) = \mathcal{F}(\mathsf{EA}^+ + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+)) \neq \mathcal{F}(\mathsf{EA}^+ + \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA}^+)) = \mathcal{E}^5.$$

Определим $T_\omega := T + \mathsf{Con}(T) + \mathsf{Con}(T + \mathsf{Con}(T)) + \ldots$.

Следующая пара теорий даёт пример Π_1-эквивалентных (доказуемо в EA) теорий с неизоморфными алгебрами.

Следствие (К.). $\mathcal{M}_{T_\omega} \ncong \mathcal{M}_{T + \mathsf{Rfn}_{\Sigma_1}(T)}$.

1-доказуемость и бимодальные алгебры доказуемости

Пусть $\mathsf{True}_{\Pi_1}(z)$ есть определение истинности для Π_1-предложений

$$\mathsf{EA} \vdash \mathsf{True}_{\Pi_1}(\ulcorner \pi(\underline{x_1}, \ldots, \underline{x_k}) \urcorner) \leftrightarrow \pi(x_1, \ldots, x_k), \quad \pi \in \Pi_1.$$

Предложение φ 1-доказуемо в T, если φ доказуемо в теории T + все истинные Π_1-предложения.

$$[1]_T \varphi := \exists \pi \left(\mathsf{True}_{\Pi_1}(\pi) \wedge \Box_T(\pi \to \varphi)\right).$$

Бимодальная алгебра доказуемости $\mathcal{M}_T^{(2)}$ теории T

$$\mathcal{M}_T^{(2)} = (\mathcal{M}_T, [1]_T) = (\mathcal{L}_T, \Box_T, [1]_T).$$

Теорема (Беклемишев, 1996). $\mathcal{M}_{\mathsf{EA}}^{(2)} \not\cong \mathcal{M}_{\mathsf{PA}}^{(2)}$, более точно,

$$(\mathcal{M}_{\mathsf{EA}}, \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{EA})) \not\cong (\mathcal{M}_{\mathsf{PA}}, \mathsf{RFN}_{\Sigma_1}(\mathsf{PA})).$$

Отметим, что в этом случае уже $\mathcal{M}_{\mathsf{EA}} \not\cong \mathcal{M}_{\mathsf{PA}}$.

Пример

Пример (К.). $\mathcal{M}_{\mathsf{PRA}} \cong \mathcal{M}_{\mathsf{I\Sigma_1}}$, но $\mathcal{M}^{(2)}_{\mathsf{PRA}} \not\cong \mathcal{M}^{(2)}_{\mathsf{I\Sigma_1}}$.

Доказательство (набросок). Рассмотрим фильтр

$$\mathcal{C}_T := \{\varphi \mid T \vdash [1]_T\varphi\},$$

т.е. множество всех T-доказуемо 1-доказуемых предложений.

Утверждение (К., Беклемишев, 2018).

$$\mathcal{C}_{\mathsf{PRA}} \equiv \mathsf{PRA} + \mathsf{Rfn}(\mathsf{PRA}) \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_{\mathsf{I\Sigma_1}} \equiv \mathsf{Rfn}(\mathsf{I\Sigma_1})_\omega.$$

$\mathcal{C}_T$ и $\mathsf{Rfn}(T)$ определимы в бимодальной алгебре $\mathcal{M}^{(2)}_T$:

$$\varphi \in \mathcal{C}_T \iff \mathcal{M}^{(2)}_T \models [1]\varphi = \top.$$

$$\varphi \in \mathsf{Rfn}(T) \iff \mathcal{M}^{(2)}_T \models \exists\psi\,(\varphi = \Box\psi \to \psi).$$

Свойство фильтра $\mathcal{C}_{\mathsf{PRA}}$ "быть порождённым элементами $\mathsf{Rfn}(\mathsf{PRA})$" сохраняется при изоморфизме. Поэтому из наличия изоморфизма $\mathcal{M}^{(2)}_{\mathsf{PRA}} \cong \mathcal{M}^{(2)}_{\mathsf{I\Sigma_1}}$ вытекало бы $\mathcal{C}_{\mathsf{I\Sigma_1}} \equiv \mathsf{I\Sigma_1} + \mathsf{Rfn}(\mathsf{I\Sigma_1})$.

Пример

Пусть $(\cdot)^*\colon (\mathcal{L}_{\mathsf{PRA}}, \Box_{\mathsf{PRA}}, [1]_{\mathsf{PRA}}) \overset{\cong}{\to} (\mathcal{L}_{\mathsf{I\Sigma_1}}, \Box_{\mathsf{I\Sigma_1}}, [1]_{\mathsf{I\Sigma_1}})$.

Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathsf{I\Sigma_1}}$, т.е. $\mathsf{I\Sigma_1} \vdash [1]_{\mathsf{I\Sigma_1}}\varphi$. В силу изоморфизма, существует $\theta \in \mathcal{L}_{\mathsf{PRA}}$

$$\theta^* = \varphi \quad \text{и} \quad \mathsf{PRA} \vdash [1]_{\mathsf{PRA}}\theta, \ \text{т.е. } \theta \in \mathcal{C}_{\mathsf{PRA}}.$$

Поскольку $\mathcal{C}_{\mathsf{PRA}} \equiv \mathsf{PRA} + \mathsf{Rfn}(\mathsf{PRA})$, существуют $\psi_1, \ldots, \psi_n$

$$\mathsf{PRA} \vdash \bigwedge_{i \leqslant n} (\Box_{\mathsf{PRA}}\psi_i \to \psi_i) \to \theta.$$

Применяя изоморфизм, $\mathsf{I\Sigma_1} \vdash \left(\bigwedge_{i\leqslant n} (\Box_{\mathsf{PRA}}\psi_i \to \psi_i) \to \theta\right)^*$, откуда

$$\mathsf{I\Sigma_1} \vdash \bigwedge_{i \leqslant n} (\Box_{\mathsf{I\Sigma_1}}\psi_i^* \to \psi_i^*) \to \varphi,$$

т.е., $\mathsf{I\Sigma_1} + \mathsf{Rfn}(\mathsf{I\Sigma_1}) \vdash \varphi$, что противоречит $\mathcal{C}_{\mathsf{I\Sigma_1}} \equiv \mathsf{Rfn}(\mathsf{I\Sigma_1})_\omega$.

Общий результат

Аналогичный результат имеет место для $T = \mathrm{EA} + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathrm{EA})$ и $S = \mathrm{EA} + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_2}(\mathrm{EA})$, поскольку

$$\mathcal{C}_T \equiv T + \mathrm{Rfn}(T) \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_S \equiv S + \mathrm{Rfn}(S + \mathrm{Rfn}(S)).$$

Приведенный выше аргумент не переносится на случай, когда фильтр $\mathcal{C}_T$ порождается итерированной рефлексией.

Теорема (К.). Пусть $T := U + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(U)$ и $S := U + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_2}(U)$. Тогда $\mathcal{M}_T \cong \mathcal{M}_S$, но $\mathcal{M}_T^{(2)} \ncong \mathcal{M}_S^{(2)}$.

Например, для $U = \mathrm{I}\Sigma_1$, имеем

$$\mathcal{C}_T \equiv \mathrm{Rfn}(T)_\omega \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_S \equiv \mathrm{Rfn}(S)_{\omega+1}.$$

Отметим, что $\mathcal{C}_S$ содержит $\mathrm{Rfn}(\mathcal{C}_T)$. Основная идея: (1) рассмотреть алгебры доказуемости теорий $\mathcal{C}_T$ и $\mathcal{C}_S$ вместо алгебр $\mathcal{M}_T^{(2)}$ и $\mathcal{M}_S^{(2)}$, и (2) применить (усиленный) результат о неизоморфизме.

Общий результат

Доказательство (набросок).

Пусть $(\cdot)^*\colon (\mathcal{L}_T, \Box_T, [1]_T) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{L}_S, \Box_S, [1]_S)$, тогда

$$\mathcal{C}_T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash [1]_T\varphi \Leftrightarrow S \vdash [1]_S\varphi^* \Leftrightarrow \mathcal{C}_S \vdash \varphi^*.$$

$(\cdot)^*$ сохраняет композицию $\Box[1]$, поэтому

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{C}_T}, \Box_T[1]_T) \cong (\mathcal{L}_{\mathcal{C}_S}, \Box_S[1]_S). \qquad (\star)$$

Обозначим $C_Q(P) := \{\varphi \mid P \vdash [1]_Q\varphi\}$, тогда $\mathcal{C}_P = C_P(P)$.
Для теорий $T = U + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(U)$ и $S = U + \mathrm{Rfn}_{\Sigma_2}(U)$ имеет место
Утверждение (К., Беклемишев, 2018). Доказуемо в EA,

$$\mathcal{C}_T \equiv C_T(U) \quad \text{ и } \mathcal{C}_S \equiv \mathrm{Rfn}(C_S(U)).$$

Поскольку $T \subseteq S$ и $C_T(U) \subseteq C_S(U)$, то, в частности,

$$\mathcal{C}_S \vdash \mathrm{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathcal{C}_T), \text{ доказуемо в EA.}$$

Из теоремы о неизоморфизме имеем $(\mathcal{L}_{\mathcal{C}_T}, \Box_{\mathcal{C}_T}) \not\cong (\mathcal{L}_{\mathcal{C}_S}, \Box_{\mathcal{C}_S})$, что противоречит $(\star)$, поскольку $\Box_T[1]_T$ есть $\Box_{\mathcal{C}_T}$ и $\Box_S[1]_S$ есть $\Box_{\mathcal{C}_S}$ (доказуемо в EA).

Спасибо за внимание!