

## Об изоморфизмах алгебр доказуемости формальных теорий

Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич

*Колмаков Евгений Александрович**Аспирант*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
 Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории  
 алгоритмов, Москва, Россия  
*E-mail: kolmakov-ea@yandex.ru*

С каждой формальной теорией  $T$  естественным образом связывается так называемая алгебра Линденбаума-Тарского  $\mathcal{L}_T$ , которая получается из алгебры всех замкнутых формул языка теории  $T$  факторизацией по отношению  $T$ -доказуемой эквивалентности. Как известно, булева алгебра  $\mathcal{L}_T$  не отражает теоретико-доказательственную силу теории  $T$ . Действительно, для любых двух достаточно сильных перечислимых непротиворечивых теорий соответствующие им алгебры Линденбаума-Тарского являются счётными безатомными булевыми алгебрами и поэтому изоморфны. Обогащение алгебры Линденбаума  $\mathcal{L}_T$  унарным оператором доказуемости  $\square_T$  в данной формальной теории  $T$  приводит к понятию алгебры доказуемости  $\mathcal{M}_T$  теории  $T$ . Такие структуры позволяют выразить многие факты о доказуемости и отличить разные по силе теории.

Ряд наиболее известных результатов об алгебрах доказуемости формальных теорий был получен В. Ю. Шавруковым. В частности, он предложил необходимые и достаточные условия изоморфизма алгебр доказуемости  $\mathcal{M}_T$  и  $\mathcal{M}_S$  для пары формальных теорий  $T$  и  $S$  (см. [1, 2]). Впоследствии Г. Адамссон [3] усилил теорему Шаврукова о необходимых условиях изоморфизма и установил, что алгебра доказуемости  $\mathcal{M}_T$  зависит не только от самой теории, но и от её конкретной аксиоматизации и формализации понятия доказуемости  $\square_T$ . А именно, он показал, что алгебры доказуемости теории  $T$  с операторами  $\square_T$  и  $\square_T^{(6)}$  (6 раз итерированный оператор доказуемости  $\square_T$ ) неизоморфны.

В данной работе получены дальнейшие усиления результата Шаврукова-Адамссона о необходимых условиях изоморфизма алгебр доказуемости и построены новые связанные с этим примеры. В частности, построены примеры пар теорий с одинаковыми (различными) классами доказуемо тотальных вычислимых функций, но неизоморфными (изоморфными) алгебрами доказуемости, а также примеры  $\Pi_1$ -эквивалентных теорий с неизоморфными алгебрами.

Полученные усиления также позволили снизить 6-кратную итерацию в результате Адамссона до более естественной 2-кратной и получить более общий результат.

**Теорема 1.** *Для любых натуральных чисел  $0 < p < q$*

$$(\mathcal{L}_T, \square_T^{(p)}) \not\cong (\mathcal{L}_T, \square_T^{(q)}).$$

*В частности,  $(\mathcal{L}_T, \square_T) \not\cong (\mathcal{L}_T, \square_T \square_T)$ .*

Помимо этого, построена серия примеров пар теорий, имеющих изоморфные одно-модальные, но неизоморфные бимодальные алгебры доказуемости (с парой операторов обычной  $\square_T$  и 1-доказуемости  $[1]_T$ ).

**Источники и литература**

- 1) Shavrukov V. Yu. A Note on the Diagonalizable Algebras of PA and ZF // *Annals of Pure and Applied Logic*, 1993, Vol. 61, No. 1–2, P. 161–173.
- 2) Shavrukov V. Yu. Isomorphisms of Diagonalizable Algebras // *Theoria*, 1997, Vol. 63, No. 3, P. 210–221.
- 3) Adamsson G. Diagonalizable algebras and the length of proofs // *Göteborgs universitet, Institutionen för filosofi, lingvistik och vetenskapsteori, student essay*, 2011.