Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Алгоритм кратчайшего приведения циклических графов к финальному виду

Научный руководитель – кирова валерия орлановна

кирова валерия орлановна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории алгоритмов, Москва, Россия
E-mail: emily.bla@yandex.ru

Рассматривается (неориентированный) *граф* состоящий из циклов (кроме петель), каждому ребру которого приписано имя a или b; разметка с тремя одинаковыми подряд именами запрещена. Одинаковые имена и их рёбра будем обозначать x. Вершину внутри xx назовём *сингулярной*; остальные вершины назовём *обычными.* Ребро, край которого сингулярный, назовём *сингулярным*; другие рёбра - *обычными.* 2-*цикл* в графе - цикл длины 2, одно ребро a и другое b. Граф, состоящий из 2-циклов, называется *финального вида. Тривиальными* назовём циклы ab, aab, abb, $aabb$. Определены две операции: двойная переклейка и удаление сингулярной вершины. *Двойная переклейка* (ДП) - удалить два одинаково помеченных ребра и четыре образовавшихся края дизъюнктно соединить рёбрами с той же пометкой: если образуется ребро с сингулярными концами, то стянуть его в сингулярную вершину. Удаление вершины - xx заменить ребром x.

«*Вырезать*» ребро означает применить ДП к его соседним рёбрам. Операция с её аргументом называется *особой*, если после её выполнения число сингулярных вершин строго уменьшится, иначе назовём её *неособой.*

Задача. Дан любой граф G. Найти *кратчайшую* последовательность операций, которая приводит G к финальному виду.

Теорема. Построен линейный по времени и памяти алгоритм, который *точно* находит кратчайшую последовательность. Алгоритм (линейность очевидна) таков:

1) вырезать в G обычные рёбра, кроме входящих в тривиальные циклы;
2) измельчить циклы до тривиальных, отщепляя тривиальный цикл.
3) удалить оставшиеся сингулярные вершины.

Доказательство (точности). В любой приводящей последовательности число особых операций равно числу B сингулярных вершин. *Отрезком* назовём максимальный по включению связный участок из обычных рёбер. Ребро, у которого одно или оба соседних ребра обычные, вырезается *неособой* операцией, и длина содержавщего его отрезка уменьшается на 2. Отрезок из одного ребра вырезается особой операцией. Поэтому число неособых операций, выполняемых алгоритмом, равно сумме S целых частей половин длин отрезков минус число циклов из обычных рёбер («отрезковый цикл», сумму без вычитаемого обозначим S'). Тогда общее число операций алгоритма $c(G)=B+S$. Минимальное число операций, приводящих G к финальному виду*, обозначим* $C(G)$. Индукцией по значению $C(G)$ покажем: G $(c(G)\leqslant C(G))$. Для индуктивного шага *нужно проверить* (*): G (операции o) $(c(G)$-$c(o(G))\leqslant 1)$. Действительно, рассмотрим первую операцию o в кратчайшей последовательности, приводящей G. По предположению индукции $c(o(G))\leqslant C(o(G))$, отсюда $c(G)\leqslant c(o(G))+1\leqslant C(o(G))+1=C(G)$.

Проверка (*) для ДП, в которой участвуют два ребра, (1) оба сингулярные, (2) одно сингулярное, (3) оба обычные. Пусть между ними *нет* сингулярного ребра. Тогда соответственно: B убывает на 1, в цикле t, образованном из отрезка нечётной длины, на 1 больше рёбер и образуется отрезковый цикл; B не изменится, в t столько же рёбер, есть отрезковый цикл; B не изменится, в t чётное число рёбер, есть отрезковый цикл; образуются отрезки до удаляемых рёбер длины m_1 и после удаляемых длины $m_{2,}$ в сумме равные нечётной длине n исходного отрезка, и есть отрезковый цикл. Пусть там *присутствуют* сингуляр рёбра и ДП выполняется для обычных рёбер: B не изменится, образуем два отрезка n_1 и n_2 между сингулярными рёбрами, которые аналогично порождают отрезки m_1 и m_2, равные в сумме; и используем, что $[n_1/2]+[n_2/2]$ отличается от $[m_1/2]+[m_2/2]$ не больше чем на 1. Проверка (*) для удаления: B уменьшается на 1, а S*'* не меняется или увеличится на 1 (но тогда образуется цикл из обычных рёбер).