Унификация и финитная аппроксимируемость линейной ступенчатой логики знания с универсальной модальностью $\mathcal{LTK}.sl_U$

Татьяна Юрьевна Зверева, научный руководитель С. И. Башмаков

Сибирский федеральный университет
Институт математики и фундаментальной информатики,
кафедра алгебры и математической логики

Ломоносов 2020
Москва, ноябрь 2020

Проблема унификации

Изначальная формулировка в области информатики:

«Можно ли свести два различных терма к одному синтаксически эквивалентному некоторой заменой переменных другими термами?»

1965 A. Robinson A machine oriented logic based on the resolution principle. J. of the ACM, pp. 23-41
1970 — D.E Knuth, P.B. Bendix, Simple word problems in universal algebras, Computational problems in abstract algebra, pp. 263–297.

Проблема унификации

Проблема унификации в области неклассических логик:

«Может ли формула быть преобразована в теорему после замены переменных?»

1997 — S. Ghilardi, Unification through projectivity, J. Logic and Computation, 7, pp. 733–752.
1999 — V. V. Rybakov, M. Terziler, C. Gencer, An essay on unification and inference rules for modal logics, Bull. Sect. Log., 28 (3), pp. 145–157.
2003 — W. Dzik, Unitary unification of S5 modal logic and its extensions, Bull. Section of Logic, 32(1–2), pp. 19–26.
2015 — E. Jerábek, Blending margins: the modal logic K has nullary unification type, J. Logic and Computation, 25, pp. 1231–1240.
2018 — S. I. Bashmakov, Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality, J. SibFU. Math. & Phys., 11(1), pp. 3–9.

Основные определения

Определение 1

Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется унифицируемой в логике $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда существует подстановка $\sigma : p_i \mapsto \sigma_i$ для каждой переменной p_i, такая что $\alpha(\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$.
В этом случае подстановка σ называется унификатором формулы α.
Корневой унификатор это унификатор, полученный подстановкой констант $\{\top, \bot\}$ вместо переменных формулы.

Определение 2

Унификатор σ формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется более общим чем σ^1 в $\mathcal{L}$ ($\sigma^1 \preceq \sigma$), если существует подстановка σ^2, такая, что для любой переменной p_i: $\sigma^1(p_i) \equiv \sigma^2(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$.

Основные определения

Определение 3

Унификатор σ формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется максимальным, если для любого σ^i справедливо $\sigma^i \preceq \sigma$ или $(\sigma^i \npreceq \sigma$ и $\sigma \npreceq \sigma^i)$.
Если максимальный унификатор только один и сравним с остальными унификаторами формулы, он называется наиболее общим унификатором (сокращенно н.о.у.).

Типы унификации:

- унитарный, если для каждой унифицируемой формулы есть н.о.у.;
- финитарный, если для каждой унифицируемой формулы существует конечное число максимальных унификаторов;
- инфинитарный, если максимальных унификаторов бесконечное число;
- нульарный, если некоторые унифицируемые формулы не имеют максимальных унификаторов.

Проективная унификация. Определения и известные результаты

Определение 4

Набор унификаторов CU формулы φ называется полным набором унификаторов в логике $\mathcal{L}$, если для каждого унификатора σ формулы φ существует $\sigma^1 \in CU$, такой, что $\sigma \preceq \sigma^1$.

Определение 5

Подстановка τ называется проективным унификатором формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ в $\mathcal{L} \in Ext(\mathcal{S}4)$, если справедливы следующие утверждения:
1. $\tau(\alpha) \in \mathcal{L}$ (т.е. τ унификатор для α);
2. $\Box\alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{L}$ для любых $p_i \in Var(\alpha)$,

В этом случае, $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ называется проективной формулой.

Техника С. Гиларди

Для изучения проблемы унификации С. Гиларди предложил новый подход, основанный на проективных формулах.

Лемма Гиларди

Если подстановка σ_p проективна для формулы φ в $\mathcal{L}$, тогда $\{\sigma_p\}$ — полный набор унификаторов для φ (т.е. σ_p — н.о.у. для φ).

*1999 — S. Ghilardi, Unification in Intuit. logic, J. Symb. Logic, 64, 859–880.

Проективная унификация. Известные результаты

Проективная унификация $\Rightarrow$ существование н.о.у.

Пример [*]

$\phi = \Box(\Box x \vee (\neg x \wedge N\Box x))$ унифицируема, но не проективна в $\mathcal{LTL}$.

Существование н.о.у. $\not\Rightarrow$ проективная унификация

* 2011 — S. Babenyshev, V. Rybakov, Unification in linear temporal logic LTL, APAL, 162, 991–1000.

Результаты. Семантика $\mathcal{LTK}.sl_U$

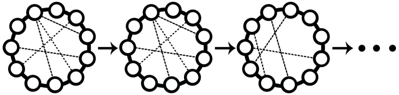
Алфавит языка $L^{\mathcal{LTK}.sl_U}$

включает $P := \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$, $(,)$, стандартные булевы операции и $\Box_1, \dots, \Box_n, \mathbf{N}$, $\Box_u$, $\Box_e$.

$\mathcal{LTK}.sl_U$-фрейм это множество $F = \langle W_{\mathbb{N}}, Next, R_u, R_e, R_1, \dots, R_n \rangle$, где
- $W_{\mathbb{N}}$ — множество сгустков (моменты времени) C^t, $t \in \mathbb{N}$;
- $Next$ — бинарное отношение «следующее натуральное число»:

$$\forall a, b \in F : aNextb \Leftrightarrow a \in C^t \& b \in C^{t+1};$$

- $R_1, \dots, R_n$ — набор отношений знаний агентов;
- R_e — отношение эквивалентности на каждом сгустке;
- R_u — отношение достижимости всюду.



Полученные результаты. Семантика $\mathcal{LTK}.sl_U$

Моделью на фрейме $F = \langle W_{\mathbb{N}}, Next, R_e, R_1, \ldots, R_n \rangle$ называется $M = \langle F, V \rangle$, где F – $\mathcal{LTK}.sl_U$-фрейм, V – означивание: $P \mapsto 2^{W_{\mathbb{N}}}$.

для любого $a \in F$ и означивания V:

a. $\langle F, a \rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow a \in V(p)$;
b. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \varphi \vee \psi \Leftrightarrow [\langle F, a \rangle \Vdash_V \varphi \vee \langle F, a \rangle \Vdash_V \psi]$;
c. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow [\langle F, a \rangle \Vdash_V \varphi \wedge \langle F, a \rangle \Vdash_V \psi]$;
d. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; \langle F, a \rangle \nVdash_V \varphi$;
e. $\langle F, a \rangle \Vdash_V N\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : a\, \mathbf{Next}\, b, \langle F, b \rangle \Vdash_V \varphi$;
f. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \Box_e\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : a\, R_e\, b, \langle F, b \rangle \Vdash_V \varphi$;
g. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \Box_i\varphi \Leftrightarrow \forall b \in C_t : a\, R_i\, b, \langle F, b \rangle \Vdash_V \varphi$;
h. $\langle F, a \rangle \Vdash_V \Box_u\varphi \Leftrightarrow \forall b \in W_{\mathbb{N}} : a\, R_u\, b, \langle F, b \rangle \Vdash_V \varphi$.

Логика $\mathcal{LTK}.sl_U$ – множество всех формул языка $L^{\mathcal{LTK}.sl_U}$ истинных на всех $\mathcal{LTK}.sl_U$-фреймах:

$$\mathcal{LTK}.sl_U := \{\alpha \in WFF_{L^{\mathcal{LTK}.sl_U}} \mid \forall F : \; F \Vdash_V \alpha\}.$$

p-морфизм в $\mathcal{LTK}.sl_U$

Определение

Пусть f – отображение фрейма $F_1 := \langle W_1, R_1 \rangle$ на фрейм $F_2 := \langle W_2, R_2 \rangle$.
Отображение f называется p-морфизмом, если

1. $\forall a, b \in W_1 : aR_1 b \Rightarrow f(a) R_2 f(b)$;
2. $\forall a, b \in W_1 : f(a) R_1 f(b) \Rightarrow (\exists c \in W_1)[aR_1 c \wedge f(c) = f(b)]$.

p-морфизм в $\mathcal{LTK}.sl_U$

$F_{inf} = \langle W, Next, R_e, R_u, R_1, \ldots, R_n \rangle$ и
$F_{fin} = \langle \{C_1, \ldots, C_k\}, Next', R'_e, R'_u, R'_1, \ldots, R'_n \rangle$,где

- $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset W$;
- $R'_e, R'_u, R'_1, \ldots, R'_n$ ограничения соответствующих отношений на сгустки $\{C_1, \ldots, C_k\}$;
- $Next' := \forall a \in \{C_1, \ldots, C_{k-1}\}$ если $aNext'b$ то $b \in \{C_2, \ldots, C_k\}$ и $\forall a \in C_k$ если $aNext'b$, то $b \in C_k$;

Теорема

Любой конечный фрейм F_{fin} является p-морфным образом бесконечного фрейма F_{inf}.

Финитная аппроксимируемость $\mathcal{LTK}.sl_U$

Логика $\mathcal{L}$ финитно аппроксимируема, если $\mathcal{L}$ полна относительно класса конечных $\mathcal{L}$-фреймов, т.е. если для каждой формулы α логики найдутся такие модели $\langle N, V_{fin}\rangle$, построенная на конечном фрейме F, и $\langle M, V_{inf}\rangle$, построенная на бесконечном фрейме, что

$$\langle M, x\rangle \nVdash_{V_{inf}} \alpha \Leftrightarrow \langle F, x\rangle \nVdash_{V_{fin}} \alpha$$

.

Теорема

Пусть $M = \langle F_{inf}, V_{inf}\rangle$ — бесконечная $\mathcal{LTK}.sl_U$-модель,
$\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ — произвольная формула модальной степени $d(\alpha) = m, m \in \omega$.
Тогда $\forall x \in \{C_1, \ldots, C_{k-m}\} \subset F_{inf}$ $(m < k)$ справедливо

$$\langle M, x\rangle \nVdash \alpha \Leftrightarrow \langle N, x\rangle \nVdash \alpha,$$

где $N = \langle F_{fin}, V\rangle = \langle\{C_1, \ldots, C_k\}, Next', R'_e, R'_u, R'_1, \ldots, R'_n, V\rangle$.

Унификация в $\mathcal{LTK}.sl_U$

Формула $\alpha(p_1, \ldots, p_s)$ проективна в $\mathcal{LTK}.sl_U$, если существует унификатор τ для α, такой, что $\Box_u \alpha \to [p_i \equiv \tau(p_i)] \in \mathcal{LTK}.sl_U$ для любых $p_i \in Var(\alpha)$.

Предложение

1. Для всех $c_1, \ldots, c_r \in \{\top, \bot\}$ и любой формулы $\delta(p_1, \ldots, p_r)$ существует $c \in \{\top, \bot\}$, такая, что $\forall x \in F$, $\langle F, x\rangle \Vdash \delta(c_1, \ldots, c_r) \equiv c$.
2. Унифицируемость произвольной формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ в $\mathcal{LTK}.sl_U$ может быть эффективно установлена через процедуру поиска корневых унификаторов.

Теорема

Любая унифицируемая в $\mathcal{LTK}.sl_U$ формула проективна

2018 — S.I. Bashmakov, Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality, J. SibFU. Math&Phys., 11(1), 3–9.

Следствия полученных результатов

Следствия:

1. Любая унифицируемая формула имеет н.о.у. и, следовательно, конечный полный набор унификаторов.
2. Для любой φ унифицируемой в $\mathcal{LTK}.sl_U$ подстановка $\sigma(p_i)$ является проективным унификатором и позволяет строить н.о.у. и полный набор унификаторов:
$$\sigma(p_i) := (\Box_u\varphi \land p_i) \lor (\neg\Box_u\varphi \land gu(p_i));$$
3. $\mathcal{LTK}.sl_U$ имеет унитарный тип унификации.

Апробация работы

- Междунар. молодёж. конференц. «Проспект Свободный – 2019», секция «Mathematics and Computer Science», III место г. Красноярск, апрель 2019;
- Междунар. научная конференц. «Мальцевские чтения – 2019», секция «Неклассические логики» г. Новосибирск, август 2019;
- Междунар. молодёж. школа-конференц. «Современные проблемы математики и её приложений» («СоПроМат – 2020»), секция «Алгебра и комбинаторика: теория групп», г. Екатеринбург, февраль 2020 Участие поддержано Краевым фондом науки (I очередь 2020);
- Междунар. молодёж. конференц. «Проспект Свободный – 2020», секция «Фунд. математика», II место, г. Красноярск, апрель 2020.