Исследование вычислительной сложности задач о независимом множестве и о вершинной k-раскраске в некоторых классах графов

Сироткин Дмитрий Валерьевич

Высшая Школа Экономики

Москва, 2019

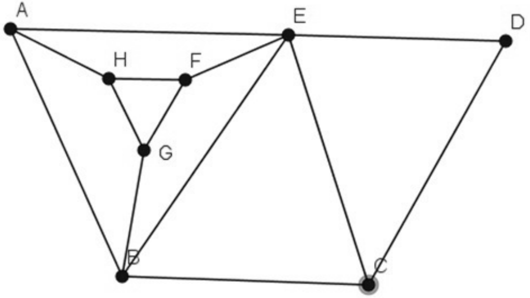
Локальные преобразования графов и их применения

Определение 1.1

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый связный его порождённый подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовём отделяющим для графа H, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus H$.

Пример

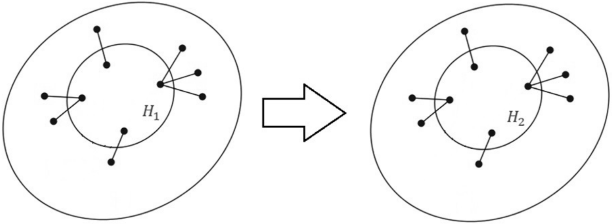
Отделяющим множеством для подграфа на вершинах $\{A, B, E, F, H, G\}$ является $\{E, B\}$.

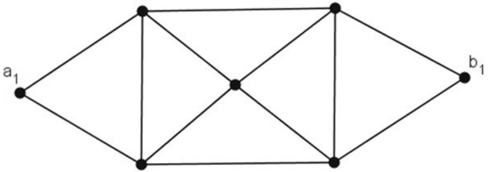


Определение 1.2

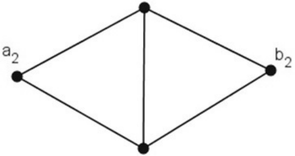
Замена H_1 на H_2 в графе H состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(H_1)) \cup V(H_2)$ и множеством рёбер $(E(H) \setminus E(H_1)) \cup E(H_2)$.

Отделяющее множество подграфа H_1 состоит в точности из всех вершин подграфа H_1, смежных с вершинами подграфа $H \setminus H_1$.

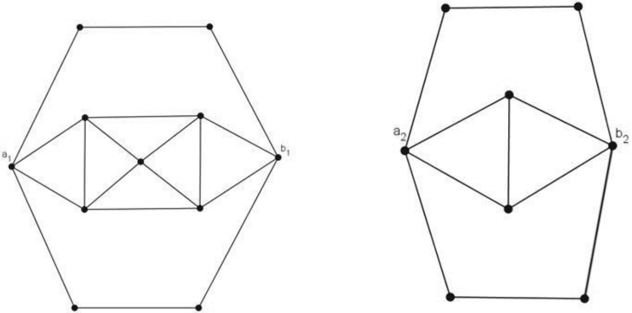




Граф H_1



Граф H_2



Граф до и после замены подграфа H_1 на подграф H_2

Задача о независимом множестве

Определение 1.3

Независимым множеством обыкновенного графа называется любое множество его попарно несмежных вершин.

Определение 1.4

Наибольшее независимое множество графа G — независимое множество графа G с наибольшим количеством вершин. Его размер называется числом независимости графа G и обозначается через $\alpha(G)$.

Определение 1.5

Задача о независимом множестве (кратко, задача НМ) для заданных графа G и натурального числа k состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$.

Понятие α-подобия

Определение 1.6

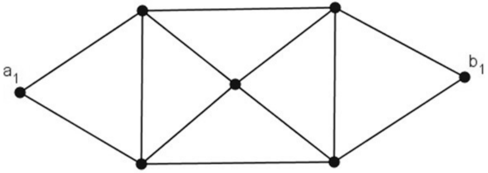
Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1)$. Будем говорить, что H_1 и H_2 являются α–подобными относительно A, если существует инъекция $f : A \mapsto V(H_2)$ и такая константа c, что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(H_1 \setminus X) = \alpha(H_2 \setminus f(X)) + c$.

Определение 1.7

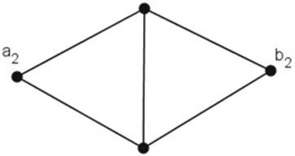
Функция f называется α-подобием между H_1 и H_2 относительно множества A.

Пример

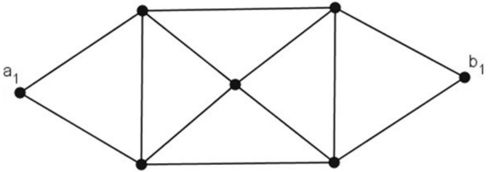
Определим множество вершин A на графе H_1: $A \triangleq \{a_1, b_1\}$ и α-подобие $f : a_1, b_1 \mapsto \{a_2, b_2\}$, где $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$. Графы H_1 и H_2 — α-подобны относительно A.



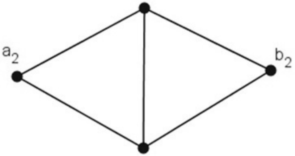
Граф H_1



Граф H_2



Граф H_1

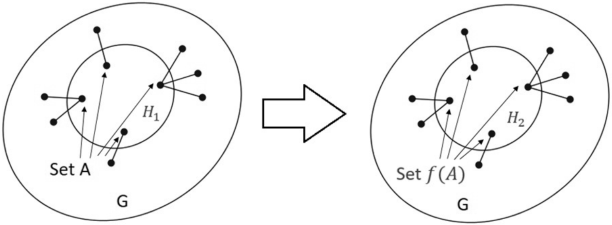


Граф H_2

$\alpha(H_1) = 3$	$\alpha(H_2) = 2$	$\alpha(H_1) - \alpha(H_2) = 1$
$\alpha(H_1 \setminus a_1) = 2$	$\alpha(H_2 \setminus a_2) = 1$	$\alpha(H_1 \setminus a_1) - \alpha(H_2 \setminus a_2) = 1$
$\alpha(H_1 \setminus b_1) = 2$	$\alpha(H_2 \setminus b_2) = 1$	$\alpha(H_1 \setminus b_1) - \alpha(H_2 \setminus b_2) = 1$
$\alpha(H_1 \setminus \{a_1, b_1\}) = 2$	$\alpha(H_2 \setminus \{a_2, b_2\}) = 1$	$\alpha(H_1 \setminus \{a_1, b_1\}) - \alpha(H_2 \setminus \{a_2, b_2\}) = 1$

Определение 1.8

Пусть A — отделяющее множество в каждом из графов H_1 и H_2. Операцией α-замены подграфа H_1 на подграф H_2 в графе G называется замена подграфа H_1 на подгрфа H_2 в случае, когда графы H_1 и H_2 α-подобны относительно A.



Лемма 1.1

Если граф G^* — результат α-замены подграфа H_1 на подграф H_2 в графе G, то f — α-подобие между G^* и G относительно A.

Следствие 1.1

Если граф G^* — результат α-замены подграфа H_1 на подграф H_2 в графе G, то $\alpha(G^*) = \alpha(G) + \alpha(H_2) - \alpha(H_1)$.

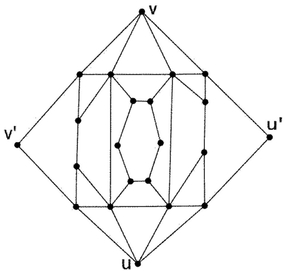
Новое доказательство NP-полноты задачи НМ для планарных графов

Хорошо известный факт (Гэри, Джонсон, Стокмейер, 1976)

Задача о независимом множестве NP-полна в классе $\mathcal{P}$ планарных графов.

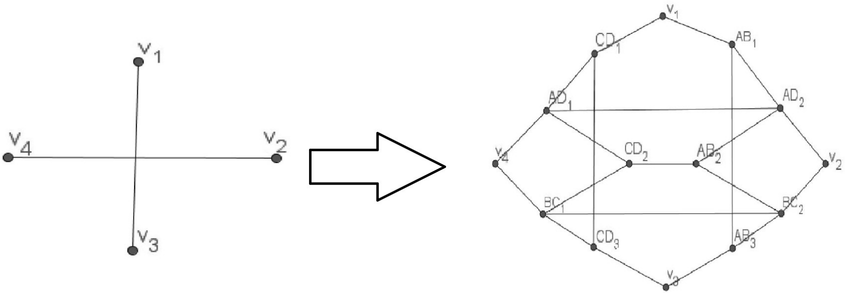
Основная идея доказательства

Каждую пару пересекающихся рёбер можно заменить на следующий "шунт".



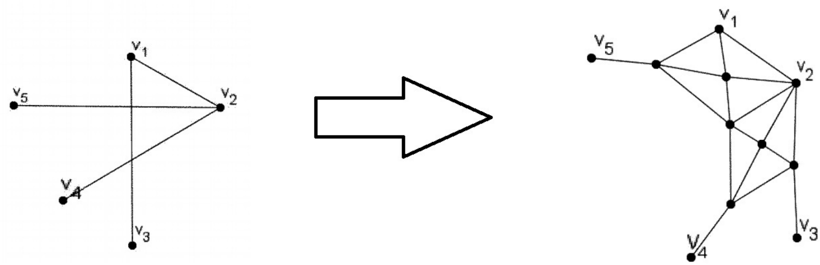
Основная идея альтернативного доказательства

Следующие 2 графа — α-подобны относительно (v_1, v_2, v_3, v_4)



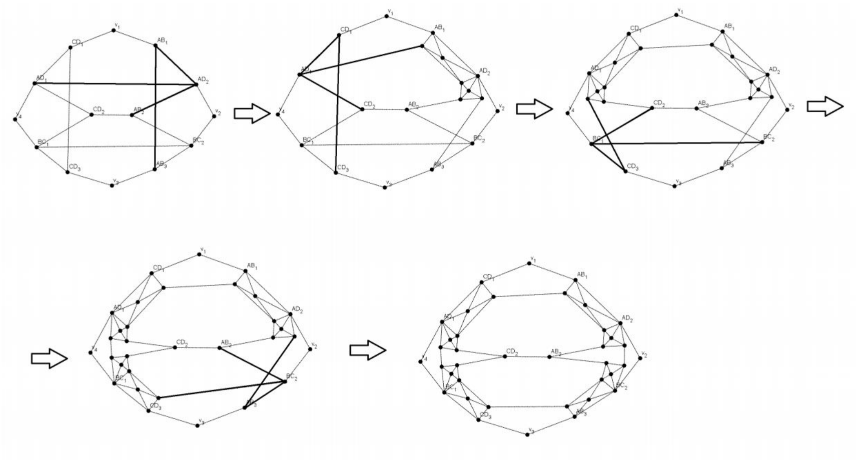
Преобразование получившегося графа

Следующие 2 графа — α-подобны относительно $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$



Шунтирование в альтернативном доказательстве

Получивийся граф α-подобен относительно (v_1, v_2, v_3, v_4) итоговому "шунту"



Теорема 1.1 (Сироткин, Малышев, 2017)

Задача о независимом множестве является NP-полной в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.

Эскиз доказательства

1. Известно, что данная задача NP-полна в классе $\mathcal{P}(3)$
2. Каждую грань планарного субкубического графа можно разбить с применением α-подобия на грани с не более, чем 6 рёбрами
3. Каждую из этих граней можно в свою очередь разбить на треугольники с контролируемым изменением числа независимости

Теорема 1.1 (Сироткин, Малышев, 2017)

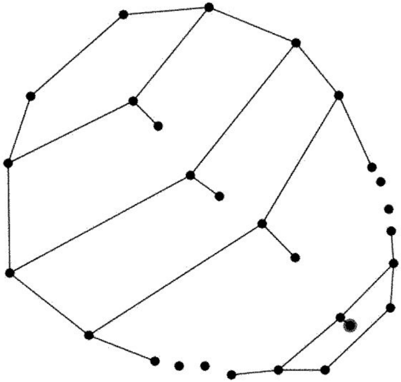
Задача о независимом множестве является NP-полной в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.

Эскиз доказательства

1. Известно, что данная задача NP-полна в классе $\mathcal{P}(3)$
2. Каждую грань планарного субкубического графа можно разбить с применением α-подобия на грани с не более, чем 6 рёбрами
3. Каждую из этих граней можно в свою очередь разбить на треугольники с контролируемым изменением числа независимости

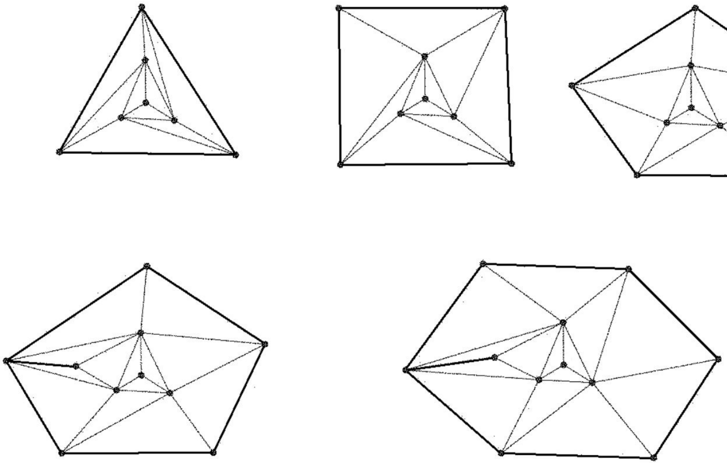
Первая операция

Разбиение каждой грани планарного субкубического графа на грани с не более, чем 6 рёбрами с помощью α-подобия



Вторая операция

Разбиение граней графа на треугольники



Задача о k-раскраске

Определение 1.9

k-раскраской обыкновенного графа G называется такое отображение $c : V(G) \longrightarrow \overline{1,k}$, что для любых смежных его вершин v и u выполнено неравенство $c(v) \neq c(u)$.

Определение 1.10

Граф называется k-раскрашиваемым, если он имеет k-раскраску.

Определение 1.11

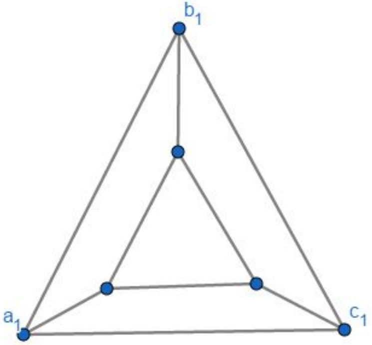
Задача о вершинной k-раскраске (кратко, задача k-ВР) для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, является ли он k-раскрашиваемым.

Определение 1.12

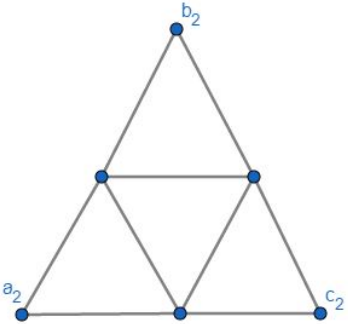
Пусть H_1 и H_2 — некоторые графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$. Будем говорить, что H_1 и H_2 являются (χ, k)-подобными относительно A, если для любых k-раскрасок c_1 и c_2, соответственно, графов H_1 и H_2 существуют k-раскраски c'' и c', соответственно, графов H_2 и H_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$.

Пример

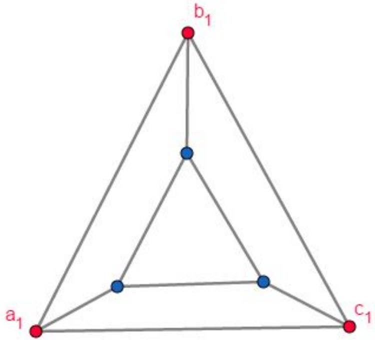
Определим множество вершин A на графе H_1: $A \triangleq \{a_1, b_1, c_1\}$; на графе H_2: $A \triangleq \{a_2, b_2, c_2\}$. Графы H_1 и H_2 — $(\chi,\ 3)$-подобны относительно A.



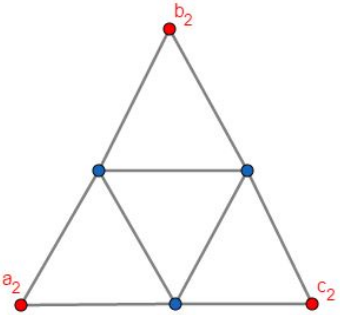
Граф H_1



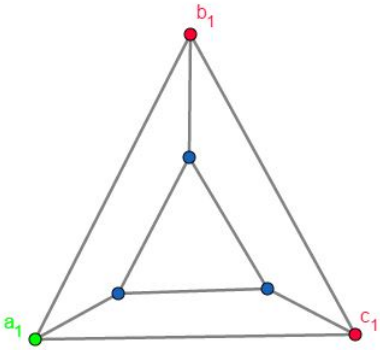
Граф H_2



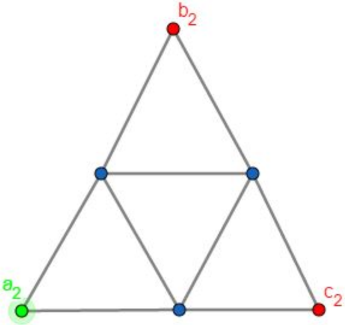
Граф H_1



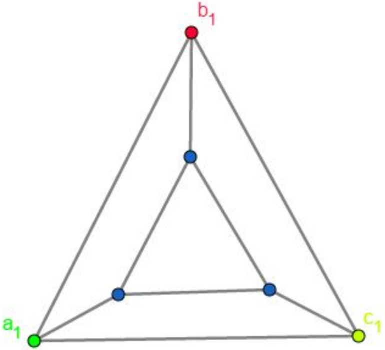
Граф H_2



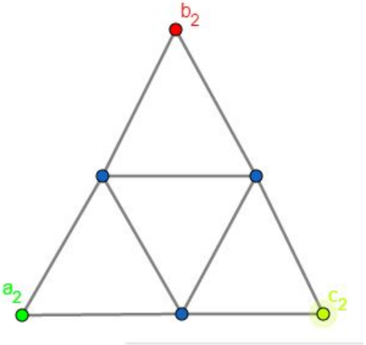
Граф H_1



Граф H_2



Граф H_1



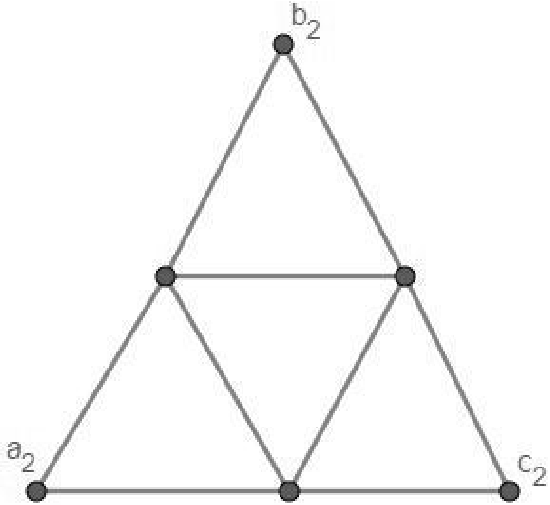
Граф H_2

Определение 1.13

Пусть даны граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$. Определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ следующим образом: $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ состоит из всевозможных разбиений A на не более чем k непустых частей, каждое из которых не продолжается до k-раскраски G.

Пример

$\mathfrak{M}_{(\chi,3)}(H_2, \{a_2, b_2, c_2\}) =$
$\{\{(a_2, b_2, c_2)\}, \{(a_2, b_2), (c_2)\}, \{(a_2, c_2), (b_2)\}, \{(b_2, c_2), (a_2)\}\}$



Лемма 1.2

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, H_1 и H_2 являются (χ, k)-подобными относительно A. Если граф $H^*_{(\chi,k)}$ — результат замены H_1 на H_2 в графе H, то граф H является k-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $H^*_{(\chi,k)}$.

Задачи реализации и оптимизации

Задача реализации

Верно ли, для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$?

Задачи реализации и оптимизации

Задача реализации

Верно ли, для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$?

Ответ

Да

Задача оптимизации

Для заданных натуральных чисел $m, n, k \geq 3$ определим функцию $f_\chi(m,n,k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1,n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m,n,k) = \max\limits_{\varrho\in\Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где

$$g_\chi(\varrho) = \min_{\{H:\ \overline{1,n}\subseteq V(H),\ \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H,\overline{1,n})=\varrho\}} |V(H)|.$$

Вопрос

Какое наименьшее значение может принимать функция $f_\chi(m,n,k)$?

Задача оптимизации

Для заданных натуральных чисел $m, n, k \geq 3$ определим функцию $f_\chi(m,n,k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1,n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m,n,k) = \max\limits_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где

$$g_\chi(\varrho) = \min_{\{H:\ \overline{1,n} \subseteq V(H),\ \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H,\overline{1,n}) = \varrho\}} |V(H)|.$$

Вопрос

Какое наименьшее значение может принимать функция $f_\chi(m,n,k)$?

Оценка

$$f_\chi(m,n,k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$$

Теорема 1.2 (Сироткин, 2017)

Для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. Справедливо соотношение $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

Эскиз доказательства

1. Показывается, что данный факт верен, если семейство ϱ состоит из одного элемента. Приводится алгоритм построения соответствующего графа
2. Из графов, соответствующих каждому элементу семейства ϱ, описанных в пункте 1, составляется граф G соответствующий данному семейству
3. Из алгоритма построения графа G выводится оценка на $f_\chi(m, n, k)$

Теорема 1.2 (Сироткин, 2017)

Для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n-элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. Справедливо соотношение $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

Эскиз доказательства

1. Показывается, что данный факт верен, если семейство ϱ состоит из одного элемента. Приводится алгоритм построения соответствующего графа
2. Из графов, соответствующих каждому элементу семейства ϱ, описанных в пункте 1, составляется граф G соответствующий данному семейству
3. Из алгоритма построения графа G выводится оценка на $f_\chi(m, n, k)$

Теорема 1.3 (Сироткин, 2018)

Задача о 3-раскраске NP-полна в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, и с гранями, ограниченными не более, чем 4 рёбрами каждая.

Эскиз доказательства

1. Производится (χ, k)-замена каждой вершины графа на некоторый шунт
2. Все грани графа рабиваются на грани, ограниченные ровно 5 рёбрами
3. Каждая такая грань разбивается на грани, ограниченный не более 4 рёбрами каждая

Теорема 1.3 (Сироткин, 2018)

Задача о 3-раскраске NP-полна в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, и с гранями, ограниченными не более, чем 4 рёбрами каждая.

Эскиз доказательства

1. Производится (χ, k)-замена каждой вершины графа на некоторый шунт
2. Все грани графа рабиваются на грани, ограниченные ровно 5 рёбрами
3. Каждая такая грань разбивается на грани, ограниченный не более 4 рёбрами каждая

Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов

Классы графов

Определение 2.1

Классом графов называется любое множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма.

Определение 2.2

Класс графов мы называем НМ-простым, если задача НМ для графов из этого класса полиномиально разрешима. Класс графов с NP-полной задачей НМ мы будем называем НМ-сложным.

Определение 2.3

Класс называется наследственным, если он замкнут относительно относительно удаления вершин.

Свойство

Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{S}$ своих минимальных запрещённых порождённых подграфов.
При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{S})$.

Определение 2.4

Наследственный класс называется конечно определённым, если множество его минимальных запрещённых порождённых подграфов конечно.

Определение 2.5

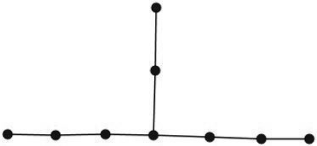
Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трёх концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$, соответственно.

Определение 2.6

Класс $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является триодом.

Обозначения

1. $\mathcal{P}$ — класс планарных графов
2. $\mathcal{D}(d)$ — класс графов с максимальной степенью d
3. $\mathcal{P}(d)$ — класс планарных графов с максимальной степенью d



Триод $T_{3,3,2}$

Теорема (Алексеев, 2003)

1. Любой конечно определённый класс $\mathcal{X}$, содержащий $\mathcal{T}$, является НМ-сложным.
2. Это же верно, если вместо $\mathcal{X}$ рассматривать классы $\mathcal{P} \cap \mathcal{X}$, $\mathcal{D}(d) \cap \mathcal{X}$ или $\mathcal{P}(d) \cap \mathcal{X}$ при $d > 2$.

Предположение (Алексеев, 2003)

Любой конечно определённый класс, не включающий $\mathcal{T}$, является НМ-простым.

Эквивалентное предположение

Для любого графа $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым.

Замечание

Аналогичное предположение существует для конечно определённых подклассов относительно классов $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}(d)$, $\mathcal{P}(d)$.

Известные результаты

Теорема (Лозин, Миланик, 2007)

Класс $\mathcal{D}(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ — НМ-простой для любого i.

Теорема (Лозин, Миланик, 2010)

Класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ — НМ-простой для любого i.

Теорема (Алексеев et al., 2008)

Класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$ — НМ-простой для любого i.

Теорема (Малышев, 2013)

Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,i,i}\})$ — НМ-простой для любого i.

Теорема (Лозин et al., 2013)

Класс $\mathcal{D}(3) \cap Free(\{T_{2,2,2}\})$ — НМ-простой.

Теорема 2.1 (Малышев, Сироткин, 2017)

Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ — НМ-простой.

Эскиз доказательства

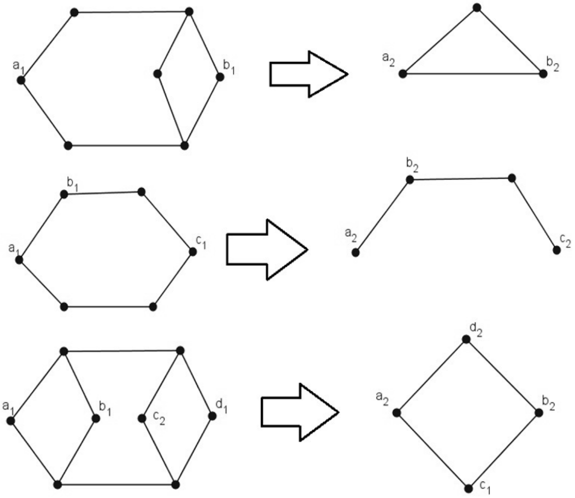
Задача о независимом множестве в классе $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ может быть сведена за полиномиальное время к той же задаче для класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ с использованием определённых α-замен. Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ является НМ-простым (Малышев, 2013).
В доказательстве используется примерно 20 различных α-замен.

Теорема 2.1 (Малышев, Сироткин, 2017)

Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ — НМ-простой.

Эскиз доказательства

Задача о независимом множестве в классе $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ может быть сведена за полиномиальное время к той же задаче для класса $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ с использованием определённых α-замен. Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ является НМ-простым (Малышев, 2013).
В доказательстве используется примерно 20 различных α-замен.


a1
b1
a2
b2
b1
a1
c1
b2
a2
c2
a1
b1
c2
d1
d2
a2
b2
c1

Вычислительная сложность задачи о 3-раскраске для некоторых наследственных классов графов

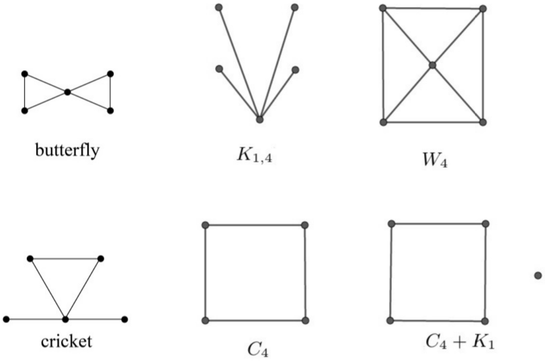
Постановка задачи

Теорема (Малышев, 2017)

Известна сложностная дихотомия для задачи о вершинной 3-раскраске для наследственных классов графов, определяемых тройкой запрещённых порождённых подграфов, каждый не более чем с 5 вершинами.

Мы стремимся установить вычислительный статус задачи о вершинной 3-раскраске для наследственных классов, определяемых четвёркой запрещённых порождённых подграфов, каждый из которых имеет не более 5 вершин.

Используемые графы



Используемые при анализе графы

Теорема 3.1 (Сироткин, Малышев, 2018)

Получена полная сложностная дихотомия для задачи о вершинной 3-раскраске для всех классов графов рассматриваемого вида, отличных от каждого из классов графов $\chi_1 - \chi_3$:

$\chi_1 = Free(K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4)$,

$\chi_2 = Free(K_{1,4}, butterfly, cricket, C_4 + K_1)$,

$\chi_3 = Free(K_{1,4}, butterfly, cricket, W_4)$.

При этом задача о вершинной 3-раскраске на первых двух классах полиномиально сводится к той же задаче на третьем.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!