Сложность конечных автоматов в терминах количества состояний и её поведение при различных операциях

М.А. Раскин

7 ноября 2018 г.

Определение

Недетерминированный конечный автомат *задаётся* входным алфавитом Σ, *множеством* состояний Q *с* принимающими состояниями $Q_+ \subseteq Q$ *и* начальным состоянием $q_0 \in Q$, *а также* отношением перехода $\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q$.

Путь *в конечном автомате* A *на входном слове* $w = w_1 \dots w_{|w|}$ *— это последовательность состояний* $q_0, \dots, q_{|w|}$, *допускаемая отношением перехода, то есть такая, что* $\forall 1 \leqslant i \leqslant |w| : (q_{i-1}, w_i, q_i) \in \delta$.

Недетерминированный конечный автомат A принимает *слово* w, *если существует путь в* A *на слове* w, *заканчивающийся в принимающем состоянии. Язык,* распознаваемый *автоматом* A *— это множество всех принимаемых им слов.*

Определение

Недетерминированный конечный автомат называется детерминированным, *если отношение перехода является всюду определённой функцией.*

Теорема (Rabin, Scott. "Finite automata and their decision problems", 1959.)

Каждый язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом, может быть распознан детерминированным конечным автоматом.

Теорема (О.Б.Лупанов, «О сравнении двух типов конечных источников», 1963.)

Такое преобразование в худшем случае требует экспоненциального увеличения количества состояний.

Теорема (О.Б.Лупанов, «О сравнении двух типов конечных источников», 1963.)

Такое преобразование в худшем случае требует экспоненциального увеличения количества состояний.

НКА → ДКА: $n \mapsto 2^{\Theta}(n)$

Теорема (Фольклор (?))

Дополнение языка, распознаваемого детерминированным конечным автоматом, всегда может быть распознано автоматом с тем же количеством состояний.

Теорема (Субботовская (неопубликованная работа))

Дополнение языка, распознаваемого недетерминированным конечным автоматом, может требовать для своего распознавания недетерминированного конечного автомата с экспоненциально большим количеством состояний.

Дополнение:
ДКА: $n \mapsto n$ НКА: $n \mapsto 2^{\Theta(n)}$

Теорема (Фольклор (?))

Язык из отражений слов, принимаемых недетерминированным конечным автоматом, всегда может быть распознан недетерминированным конечным автоматом с тем же количеством состояний.

Теорема (Миркин, «О двойственных автоматах», 1966)

Язык из отражений слов, принимаемых детерминированным конечным автоматом, может требовать для своего распознавания детерминированного конечного автомата с экспоненциально большим количеством состояний.

«k-й символ входного слова — это 1»

Отражение:
ДКА: $n \mapsto 2^{\Theta(n)}$ НКА: $n \mapsto n + \Theta(1)$

Теорема (Маслов, «Оценки числа состояний конечных автоматов», 1970 — нижняя оценка)

Пересечение языков, распознаваемых двумя недетерминированными конечными автоматами, всегда может быть распознано недетерминированным конечным автоматом с количеством состояний, равным произведению количеств состояний исходных автоматов.

Если исходные автоматы были детерминированными, построенный автомат тоже будет детерминированным.

Пересечение:
ДКА, НКА: $n, m \mapsto \Theta(nm)$

Теорема (Фольклор (?))

Объединение языков, распознаваемых двумя недетерминированными конечными автоматами, всегда может быть распознано недетерминированным конечным автоматом с количеством состояний, равным сумме количеств состояний исходных автоматов.

Теорема (Маслов, «Оценки числа состояний конечных автоматов», 1970 — нижняя оценка)

Объединение языков, распознаваемых двумя детерминированными конечными автоматами, всегда может быть распознано детерминированным конечным автоматом с количеством состояний, равным произведению количеств состояний исходных автоматов.

Объединение:
ДКА: $n, m \mapsto \Theta(mn)$ НКА: $n, m \mapsto \Theta(m+n)$

ДКА	НКА
Дополнение	
n	2^n
Объединение	
mn	$m+n$
Пересечение	
mn	mn
Отражение	
2^n	n

Определение

Недетерминированный конечный автомат называется однозначным, *если для каждого входного слова существует не более одного пути на этом слове, заканчивающегося в принимающем состоянии.*

Определение

Недетерминированный конечный автомат называется строго однозначным, *если в нём можно выбрать* множество отвергающих *состояний (не являющихся принимающими), так что для каждого слова существует ровно один путь на этом слове, который заканчивается в принимающем или отвергающем состоянии.*

Определение

Недетерминированный конечный автомат называется структурно однозначным, *если для каждого входного слова и каждого состояния автомата существует не более одного пути на этом слове, заканчивающегося в данном состоянии.*

Hing Leung, «Descriptional complexity of NFA of different ambiguity», 2006:

Теорема

Язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом, может в худшем случае требовать для своего распознавания однозначного конечного автомата с экспоненциально большим количеством состояний.

Теорема

Язык, распознаваемый однозначным конечным автоматом, может в худшем случае требовать для своего распознавания детерминированного конечного автомата с экспоненциально большим количеством состояний.

НКА → ОКА, ОКА → ДКА: $n \mapsto 2^n$

Теорема

Язык из отражений слов, принимаемых однозначным конечным автоматом, всегда может быть распознан однозначным конечным автоматом с тем же количеством состояний.

Теорема

Пересечение языков, распознаваемых двумя однозначными конечными автоматами, всегда может быть распознано однозначными конечным автоматом с количеством состояний, равным произведению количеств состояний исходных автоматов.

Теорема (Охотин, «Unambiguous finite automata over a unary alphabet», 2012.)

Дополнение языка, распознаваемого однозначным конечным автоматом, может требовать для своего распознавания однозначного конечного автомата с квадратично большим количеством состояний.

Более того, эта оценка верна для однобуквенного входного алфавита.

Дополнение ОКА: $n \mapsto \geqslant n^{2-o(1)}$

Теорема (Любич, «Оценки числа состояний, возникающих при детерминизации недетерминированного автономного автомата», 1964)

Каждый язык, распознаваемый недетерминированным конечным автоматом с n состояниями над однобуквенным алфавитом, может быть распознан детерминированным конечным автоматом с $exp(\Theta(\sqrt{n \log n}))$ состояниями.

НКА → ДКА (1 буква): $n \mapsto 2^{\Theta\sqrt{n \log n}}$

Теорема (Mera, Pighizzini, «Complementing unary nondeterministic automata», 2005)

Эта конструкция является оптимальным способом дополнения недетерминированного конечного автомата над однобуквенным алфавитом.

Дополнение НКА (1 буква): $n \mapsto 2^{\Theta\sqrt{n \log n}}$

Теорема

Пустота языка, распознаваемого недетерминированным конечным автоматом, может быть проверена за полиномиальное время.

Теорема (Hunt III, «On the Time and Tape Complexity of Languages», 1973)

Проверка пустоты дополнения языка, распознаваемого недетерминированным конечным автоматом, является полной задачей в классе PSPACE.

Теорема (Hunt III, «On the Time and Tape Complexity of Languages», 1973)

Проверка пустоты дополнения языка, распознаваемого недетерминированным конечным автоматом, является полной задачей в классе PSPACE.

Теорема (Stearns, Hunt III, «On the equivalence and containment problems for unambiguous regular expressions, regular grammars and finite automata», 1985)

Пустота дополнения языка, распознаваемого однозначным конечным автоматом, может быть проверена за полиномиальное время.

ДКА	ОКА	НКА
	Дополнение	
n	?	2^n
	Объединение	
mn	?	$m+n$
	Пересечение	
mn	mn	mn
	Отражение	
2^n	n	n

Гипотеза

Дополнение языка, распознаваемого однозначным конечным автоматом, может быть распознано однозначным конечным автоматом с полиномиально большим количеством состояний.

Теорема (Р.)

Данная гипотеза не верна.

Более того, она не верна даже для однобуквенного входного алфавита.

Обобщения конечных автоматов: другой порядок чтения слова.

Мы считаем, что в начале и в конце слова имеются специальные буквы.

Определение

Циклический *автомат по достижении конца слова может перейти к чтению слова сначала.*

Маятниковый *автомат по достижении края слова может продолжить его читать в обратном направлении.*

Двусторонний *автомат на каждом шаге выбирает направление, в котором делать следующий шаг.*

Теорема (Sipser, «Lower bounds on the size of sweeping automata», 1980.)

Язык, распознаваемый (односторонним) недетерминированным конечным автоматом, может в худшем случае требовать для своего распознавания маятникового детерминированного конечного автомата с экспоненциально большим количеством состояний.

НКА → маятниковый ДКА: $n \mapsto 2^{\Theta}(n)$

Теорема (Р.)

Существует последовательность языков в алфавите из одной буквы, которые могут быть распознаны как однозначными односторонними автоматами, так и детерминированными циклическими автоматами приблизительно равных размеров, распознавание дополнений которых недетерминированными односторонними конечными автоматами требует более чем полиномиального увеличения количества состояний.