

Модальные логики

Рассматриваем *модальные пропозициональные формулы* в языке классической логики высказываний с дополнительной одноместной связкой \Box (необходимо). Т.е. формулы строятся из множества переменных $\text{Var} = \{p_1, p_2, \dots\}$ с помощью логических связок $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, \Box$.

Будем использовать также производные связки:

$$\Diamond A := \neg\Box\neg A \text{ (возможно)}, \perp := p \wedge \neg p \text{ (ложь)}, \top := p \rightarrow p \text{ (истина)},$$

$$A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \text{ (эквиваленция)}.$$

Аксиомы модального исчисления **K**:

1. Аксиомы классического исчисления высказываний;
2. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$.

Правила вывода:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (modus ponens);} \quad \frac{A}{\Box A} \text{ (добавление).}$$

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{M} = (W, R, v)$, где:

- W — непустое множество „возможных миров“;
- R — бинарное отношение на W ;
- $v: W \times \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ — оценка переменных.

Пара (W, R) называется *шкалой Крипке*.

Истинность формулы A в данном мире x модели Крипке \mathcal{M} (обозначение: $\mathcal{M}, x \models A$) определяется индуктивно:

- $\mathcal{M}, x \models p_i \iff v(x, p_i) = 1$;
- $\mathcal{M}, x \models (A \vee B) \iff (\mathcal{M}, x \models A \text{ или } \mathcal{M}, x \models B)$;
- $\mathcal{M}, x \models (A \wedge B) \iff (\mathcal{M}, x \models A \text{ и } \mathcal{M}, x \models B)$;
- $\mathcal{M}, x \models (A \rightarrow B) \iff (\mathcal{M}, x \not\models A \text{ или } \mathcal{M}, x \models B)$;
- $\mathcal{M}, x \models \neg A \iff \mathcal{M}, x \not\models A$;
- $\mathcal{M}, x \models \Box A \iff$ для всех y (если xRy , то $\mathcal{M}, y \models A$).

Формула A *общезначима* в шкале Крипке (W, R) , если она истинна во всех мирах всех моделей Крипке на этой шкале. Обозначение: $(W, R) \models A$.

Теорема о корректности для **K.** Всякая формула, доказуемая в исчислении **K**, общезначима во всех шкалах Крипке.

Теорема о полноте для **K.** Всякая формула, общезначимая во всех шкалах Крипке, доказуема в **K**.

Теорема о финитной аппроксимируемости (полноте относительно конечных шкал) для **K.** Всякая формула, общезначимая во всех конечных шкалах Крипке, доказуема в **K**.

Модальные исчисления и логики

(Нормальное) модальное исчисление получается добавлением к **K** дополнительных аксиом (в виде схем). Модальной логикой называется множество теорем какого-нибудь модального исчисления.

Через **K** + Γ обозначается модальное исчисление с множеством дополнительных аксиом Γ .

Теорема о корректности для модальных исчислений. Всякая формула, доказуемая в исчислении **K** + Γ , общезначима во всех шкалах Крипке, где общезначимы формулы из Γ .

Через $\mathbf{V}(\Gamma)$ (или $\mathbf{V}(\mathbf{K} + \Gamma)$) обозначается класс всех шкал, где общезначимы формулы из Γ (*многообразия шкал* исчисления $\mathbf{K} + \Gamma$).

Некоторые модальные исчисления:

$$\mathbf{T} := \mathbf{K} + \Box A \rightarrow A,$$

$$\mathbf{K4} := \mathbf{K} + \Box A \rightarrow \Box \Box A,$$

$$\mathbf{S4} := \mathbf{T} + \Box A \rightarrow \Box \Box A,$$

$$\mathbf{S5} := \mathbf{S4} + \Diamond \Box A \rightarrow A,$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{K} + \Diamond \top.$$

Если формула A выводится в исчислении X из множества формул Δ , пишем $\Delta \vdash_X A$.

Модальной логикой класса шкал \mathcal{C} называется множество всех формул, общезначимых на всех шкалах из \mathcal{C} . Обозначение: $\mathbf{L}(\mathcal{C})$.

Модальное исчисление X называется *полным* (относительно класса шкал \mathcal{C}), если множество теорем X совпадает с $\mathbf{L}(\mathcal{C})$.

1. *Теоремы о дедукции.*

1. Докажите, что если $\Delta \cup \{A\} \vdash_{\mathbf{S4}} B$, то $\Delta \vdash_{\mathbf{S4}} \Box A \rightarrow B$. (Подсказка: воспользуйтесь индукцией по длине вывода.)
2. Сформулируйте и докажите теорему о дедукции для $\mathbf{K4}$.
3. (*) Сформулируйте и докажите теорему о дедукции для \mathbf{K} .

2. Какие из следующих формул доказуемы в \mathbf{K} при всех A, B , а какие — нет?

- а) $\Box A \rightarrow \Diamond A$; б) $\Box A \wedge \Diamond B \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$; в) $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$; г) $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$; д) $\Box \Box A \rightarrow \Box A$; е) $\Diamond \Box A \rightarrow \Box A$.

Какие из этих формул доказуемы в $\mathbf{S4}$?

3. Докажите, что если многообразия шкал двух модальных исчислений различны, то и множества их теорем различны (*исчисления не эквивалентны*).
4. Докажите, что исчисления \mathbf{K} , \mathbf{T} , $\mathbf{K4}$, $\mathbf{S4}$, \mathbf{D} , $\mathbf{S5}$ не эквивалентны.
5. Существует ли формула, общезначимая во всех шкалах (W, R) , для которых R есть линейный порядок, но не доказуемая в $\mathbf{S4}$?
6. Формулы A, B эквивалентны в исчислении X , если $\vdash_X A \leftrightarrow B$. Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в \mathbf{K} .
7. Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в \mathbf{T} .
8. (*) Постройте бесконечное множество формул от одной переменной, попарно не эквивалентных в $\mathbf{S4}$.
9. *Положительная модальность* — это формула, построенная из связок \Diamond, \Box и переменной p . Докажите, что в $\mathbf{K4}$ имеется бесконечно много попарно неэквивалентных положительных модальностей.
10. Сколько (с точностью до эквивалентности) положительных модальностей в $\mathbf{S5}$?
11. (*) Тот же вопрос про $\mathbf{S4}$.
12. Модальное исчисление называется *табличным*, если оно полно относительно некоторой конечной шкалы Крипке. Докажите, что $\mathbf{S5}$ не таблично. Выведите отсюда, что и другие исчисления, которые определены выше, не табличны.