Математическая логика и теория алгоритмов, 2 к., 2021

Темы и вопросы курса

1. **Множества.**
   1.1. Принадлежность множеству, включение множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение, прямое произведение.
   1.2. Отношения, их интерпретация как подмножеств прямого произведения, характеристических функций, свойств со значением И или Л.
   1.3. Отображения: инъективные, сюръективные, биективные.
   1.4. Специальные виды двухместных отношений: эквивалентность, порядок, дерево.
   1.5. Лемма Кёнига.
   1.6. Счетные множества. Несчетность множества последовательностей нулей и единиц.
   1.7. Теорема Кантора – Бернштейна.
2. **Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора.**
   2.1. Определение Неймана натуральных чисел в теории множеств.
   2.2. Полное упорядочение. Предельные и не предельные элементы.
   2.3. Индуктивное доказательство для вполне упорядоченных множеств.
   2.4. Индуктивное определение функции на вполне упорядоченном множестве.
   2.5. Свойства начальных отрезков вполне упорядоченных множеств.
   2.6. Единственность вложения для вполне упорядоченных множеств.
   2.7. Возможность сравнения вполне упорядоченных множеств
   2.8. Функция выбора. Существование функции выбора для вполне упорядоченного множества.
   2.9. Теорема Цермело о возможности вполне упорядочения.
   2.10. Аксиома выбора.
   2.11. Возможность сравнения любых множеств по мощности.
   2.12. Теорема Банаха – Тарского (без доказательства). Аксиома детерминированности игр.
3. **Языки.**
   3.1. Имена и значения. Значения составных имен. Скобки.
   3.2. Язык и структура. Значения имен объектов и отношений.
   3.3. Переменные. Контекст в универсуме. Термы, значения термов в контексте.
   3.4. Атомные формулы, их значение в контексте.
   3.5. Формулы логики отношений, индуктивное определение.
   3.6. Связанные и свободные вхождения переменных. Свободные переменные формулы.
   3.7. Отношения, определяемы формулами – бесконечноместное и на конечной степени универсума.
   3.8. Высказывания. Истинность высказывания в структуре. Выполнимость высказывания.
   3.9. Эквивалентные формулы. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).
   3.10. Предваренная нормальная форма.
   3.11. Игровая семантика логики отношений.
4. **Определимость в поле действительных чисел.**
   4.1. Алгебра многочленов. Операция модифицированного деления.
   4.2. Алгебра многочленов. Ключевые соображения о знаках и корнях.
   4.3. Алгебра многочленов. Диаграммы.
   4.4. Алгебра многочленов. Операции редукции.
   4.5. Алгебра многочленов. Построение последовательности семейств.
   4.6. Алгебра многочленов. Построение большой диаграммы.

4.7. Поле действительных чисел. Элиминация кванторов. Алгоритм выяснения истинности высказываний – разрешимость утверждений алгебры и геометрии.

5. **Модальная логика.**
   5.1. Модальная логика. Содержательный смысл модальностей.
   5.2. Модальная логика. Индуктивное построение формул.
   5.3. Модальная логика. Семантика Крипке.
   5.4. Модальная логика. Свойства истинности.
   5.5. Модальная логика. Выводимость. Непротиворечивость. Полнота (без доказательства).
6. **Компактность.**
   6.1. Пространство двоичных последовательностей. Окрестности, покрытия, открытые и замкнутые множества.
   6.2. Теорема компактности для пространства двоичных последовательностей.
   6.3. Теорема компактности для компактного топологического пространства.
   6.4. Теорема компактности для логики высказываний.
   6.5. Теория, как пара множеств утверждений и опровержений. Определения модели, локально выполнимой теории. План доказательства теоремы компактности.
   6.6. Теорема компактности. Построения дерева для локально выполнимой теории.
   6.7. Теорема компактности. Один шаг в построение модели для теории в логике отношений для счетного языка.
   6.8. Теорема компактности, организация процесса рассмотрения формул и выбор цепи.
   6.9. Перечислимость множества следствий теории. Перечислимость истин.
   6.10. Теорема компактности для счетного и для любого (без доказательства) языка. (Теорема Геделя – Мальцева).
7. **Структуры и теории.**
   7.1. Равенство в структуре. Нормальные структуры. Теория с равенством.
   7.2. Существование нормальной модели для теории с равенством.
   7.3. Теории линейного порядка, линейного порядка без наибольшего элемента, плотного линейного порядка без наибольшего и наименьшего элемента, дискретного линейного порядка с наименьшим и без наибольшего элемента. Примеры моделей этих теорий.
   7.4. Изоморфизм структур.
   7.5. Изоморфизм плотных порядков без наибольшего и наименьшего элемента.
   7.6. Теория структуры и класса структур.
   7.7. Соответствие Галуа между теориями и классами структур.
8. **Теория моделей.**
   8.1. Эквивалентность структур. Соотношение с изоморфизмом структур.
   8.2. Элементарное расширение и подструктура структуры.
   8.3. Критерий Тарского – Воота.
   8.4. Теоремы Левегейма – Сколема об элементарной подструктуре.
   8.5. Теоремы Левегейма – Сколема об элементарном расширении.
   8.6. Полные теории. Существование пополнения.
   8.7. ω-категоричность. ω-категоричность плотного порядка без наибольшего и наименьшего.
   8.8. Признак Лося – Воота.
   8.9. Не стандартные модели дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.

8.10. Сверхбольшая теория для дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
8.11. Сверхбольшая структура – модель дискретного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.
8.12. Пример полной, не ω-категоричной теории. Доказательство и обсуждение.

9. Теория определимости.

9.1. Определимость отношения через множество отношений. Решетка определимости.
9.2. Автоморфизмы структур. Соответствие Галуа между решеткой определимости и решеткой надгрупп.
9.3. Примеры автоморфизмов и не определимости для решетки определимости порядка рациональных чисел.
9.4. Лемма об определимости.
9.5. Теорема Свенониуса. Схема доказательства и нулевой шаг.
9.6. Теорема Свенониуса. Очередной шаг построения.
9.7. Возрастающая цепочка элементарных расширений
9.8. Теорема Свенониуса. Завершение построения.

10. Математика, как аксиоматическая теория.

10.1. Попытка Кантора аксиоматизации теории множеств. Парадокс Рассела.
10.2. Теория ZF. Примеры аксиом.
10.3. Исчисление отношений.
10.4. Теория ZFC. Теоремы.
10.5. Достижение Лобачевского. Основания непротиворечивости геометрий.
10.6. Программа Гильберта.
10.7. Парадокс Лжеца. Кодирование формул. Определимость подстановки.
10.8. Теорема Геделя – Тарского о неопределимости истины.
10.9. Определимость доказуемости в Программе Гильберта. Теорема Геделя о неполноте.
10.10. Независимость в теории множеств (без доказательства).

11. Теория алгоритмов и исчислений.

11.1. Алгоритмы. Вычислимые функции.
11.2. Перечислимые и разрешимые множества. Операции над ними
11.3. Универсальная вычислимая функция.
11.4. Пример перечислимого не разрешимого множества.
11.5. Исчисления.
11.6. Породимые множества. Операции над ними.
11.7. Выводы. Выводимость в исчислении. Существование выводов у породимых объектов.
11.8. Грамматики. Тезис Поста.
11.9. Равнообъемность перечислимости и породимости.
11.10. Машина Тюринга. Тезис Черча.

12. Теория сложности.

12.1. Сложность объектов. Теорема Колмогорова.
12.2. Сложность вычислений. Определения.
12.3. Задачи, решаемые перебором. Определение и примеры.
12.4. Универсальность задачи выполнимости формулы логики высказываний.
12.5. Проблема перебора.

13. Большие идеи математической логики и теории алгоритмов.

- 13.1.Большая идея индуктивного определения формулы, индукции по построению и ее применения.
- 13.2.Большая идея значения составного имени и ее применения.
- 13.3.Большая идея двоичного кодирования и ее применения.
- 13.4.Большая идея формулы и алгоритма, как цепочки символов, являющейся объектом – аргументом формул и алгоритмов и ее применения.
- 13.5.Большая идея компактности и ее применения.
- 13.6.Большая идея объединения возрастающей цепи и ее применения.
- 13.7.Большая идея челночного построения соответствия и ее применения.
- 13.8.Большая идея универсальности и ее применения.
- 13.9.Большая идея глобального поведения, определяемого локальными правилам.