Многозначная логика

Ярослав Петрухин

Лодзинский университет

29 октября 2021

Два подхода к изучению многозначной логики

Дедуктивный

Логика как множество общезначимых (или доказуемых) формул.

- $\{A \mid \models A\}$ (или $\{A \mid \vdash A\}$).
- $\{\langle \Gamma, A\rangle \mid \Gamma \models A\}$ (или $\{\langle \Gamma, A\rangle \mid \Gamma \vdash A\}$).
- $\{\langle \Gamma, \Delta\rangle \mid \Gamma \models \Delta\}$ (или $\{\langle \Gamma, \Delta\rangle \mid \Gamma \vdash \Delta\}$).

Функциональный

Логика как множество функций, соотвествующих логическим связкам.

Пусть F — некоторое множество функций. Пусть G — подмножество F. Тогда G называется функционально полным в F, е. и т.е. все функции из F выразимы фукнциями из G.

Логика Лукасевича $\mathbf{Ł_3}$ (1920)

A	$\neg$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

$\vee$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

$\wedge$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	0
0	0	0	0

$\rightarrow$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

- Формула A называется общезначимой ($\models A$ или $\models_{\mathbf{Ł_3}} A$), е. и т.е. она принимает значение 1 при любой оценке v ($v(A) = 1$).
- Формула A следует из множества формул Γ ($\Gamma \models A$), е. и т.е. при всякой оценке v, если $v(B) = 1$ для всех $B \in \Gamma$, то $v(A) = 1$.
- Иными словами, 1 является выделенным значением.

Для каких целей Лукасевич построил $\mathbf{Ł_3}$?

Чтобы можно было работать с утверждениями о случайных событиях и избежать так называемого логического фатализма.

1. Завтра будет морское сражение.
2. Допустим, что высказывание “Завтра будет морское сражение” истинно.
3. Необходимо, что завтра будет морское сражение.
4. Допустим, что высказывание “Завтра будет морское сражение” ложно.
5. Необходимо, что завтра не будет морского сражения.
6. Необходимо, что завтра будет морское сражение или необходимо, что завтра не будет морского сражения.

Пусть P_3 — множество всех n-местных функций на множестве $\{1, {}^1\!/_2, 0\}$.

Пусть F — некоторое множество функций. Пусть G — подмножество F. Тогда G называется функционально предполным в F, е. и т.е. добавление к G любой не выразимой в G функции, но выразимой в F, делает G функционально полным в F.

Множество функций логики $\mathbf{Ł_3}$ является функционально предполным в P_3.

Оператор Слупецкого. Не выразим в $\mathbf{Ł_3}$.

A	T
1	$^1/_2$
$^1/_2$	$^1/_2$
0	$^1/_2$

Логика Лукасевича vs классическая логика

- все общезначимые формулы $\mathbf{Ł_3}$ являются общезначимыми в **CPL**
- но не наоборот:
  - $\not\models_{\mathbf{Ł_3}} p \vee \neg p$, $\not\models_{\mathbf{Ł_3}} \neg(p \wedge \neg p)$, $\not\models_{\mathbf{Ł_3}} (p \to (p \to q)) \to (p \to q)$,
  - $\models_{\mathbf{CPL}} p \vee \neg p$, $\models_{\mathbf{CPL}} \neg(p \wedge \neg p)$, $\models_{\mathbf{CPL}} (p \to (p \to q)) \to (p \to q)$.

При этом $\models_{\mathbf{Ł_3}} (p \to (p \to (p \to q))) \to (p \to (p \to q))$.

Теорема дедукции: для всех формул A и B, $A \models B$, е. и т.е. $\models A \to B$. Теорема дедукции верна для **CPL**, но не для $\mathbf{Ł_3}$.

- $p \wedge \neg p \models_{\mathbf{Ł_3}} q$
- $\not\models_{\mathbf{Ł_3}} (p \wedge \neg p) \to q$

Однако теорема дедукции верна для импликации Слупецкого $\to_S$.

- $A \to_S B = A \to (A \to B)$.
- $A \to B = (A \to_S B) \wedge (\neg B \to_S \neg A)$.

О конъюнкции и дизъюнкции в **Ł₃**

- $A \vee B = (A \to B) \to B$
- $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$

Но их можно определить по-другому!

- $A \vee_L B = \neg A \to B$
- $A \wedge_L B = \neg(A \to \neg B)$

$\vee_L$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	$1/2$	0

$\wedge_L$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	0	0
0	0	0	0

$\models_{Ł_3} A \vee_L \neg A$, $\not\models_{Ł_3} (A \vee_L A) \to A$.

Аксиоматизация Ł_3 (Вайсберг, 1931)

1. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
2. $A \to (B \to A)$
3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
4. $((A \to \neg A) \to A) \to A$

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Если аксиому 4 заменить на $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$, то мы получим классическую логику высказываний.

Аксиомы для оператора Слупецкого:

1. $\mathsf{T}(A) \to \neg\mathsf{T}(A)$
2. $\neg\mathsf{T}(A) \to \mathsf{T}(A)$

$\mathbf{Ł_n}$ — n-значное обобщение $\mathbf{Ł_3}$

Упорядоченная тройка вида $\langle V, C, D\rangle$, где V — множество истинностных значений, — множество логических связок, D — множество выделенных значений, называется логической матрицей.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $V = \{0, {}^1/_{n-1}, \ldots, {}^{n-2}/_{n-1}, 1\}$, $C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ и $D = \{1\}$. Определим логические связки следующим образом для всяких $x, y \in V$:

$$\neg x = 1 - x,$$
$$x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y),$$
$$x \wedge y = \min(x, y),$$
$$x \vee y = \max(x, y).$$

Пусть $E(\mathbf{L})$ — множество общезначимых формул логики $\mathbf{L}$. $E(\mathbf{Ł_n}) \subseteq E(\mathbf{Ł_m})$, е. и т.е. $m - 1$ есть делитель $n - 1$.

Независимость аксиоматизации

Аксиоматизация классической логики высказываний в языке с $\neg$ и $\to$

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Независимость аксиомы 2

A	$\neg$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

Выделенное значение: 1. Аксиомы 1 и 3 являются общезначимыми формулы, в отличие от аксиомы 2 (при оценке v, такой, что $v(p) = v(q) = 1/2$ и $v(r) = 0$). Правило вывода модус поненс корректно.

Независимость аксиомы 3

A	$\neg$
1	0
$1/2$	0
0	1

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

Выделенное значение: 1. Аксиомы 1 и 2 являются общезначимыми формулы, в отличие от аксиомы 3 (при оценке v, такой, что $v(p) = 1/2$ и $v(q) = 1$). Правило вывода модус поненс корректно.

Независимость аксиомы 1

A	$\neg$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

$\to$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

Выделенные значения: 1 и $1/2$. Аксиомы 2 и 3 являются общезначимыми формулы, в отличие от аксиомы 1 (при оценке v, такой, что $v(p) = 1/2$ и $v(q) = 1$). Правило вывода модус поненс корректно.

Логика **PComp** — результат замены $\to$ на $\to_S$ в $\mathbf{Ł_3}$

$\to_S$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

PComp — от paracomplete logic (параполная логика).
Импликация Слупецкого верифицирует импликативный фрагмент классической логики.

Параполные логики

- Логика $\mathbf{L}$ называется параполной, е. и т.е. для некоторых формул A и B и некоторого множества формул Γ верно, что $\Gamma, A \models_{\mathbf{L}} B$ и $\Gamma, \neg A \models_{\mathbf{L}} B$, но $\Gamma \not\models_{\mathbf{L}} B$.
- Логика $\mathbf{L}$ называется параполной, е. и т.е. для некоторых формул A и B верно, что $A \not\models_{\mathbf{L}} B, \neg B$ (Hyde's definition).
- Логика $\mathbf{L}$ называется параполной, е. и т.е. для некоторой формулы A верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} A \vee \neg A$ (Sette and Carnielli's definition).
- Логика $\mathbf{L}$ называется параполной, е. и т.е. для некоторой формулы A верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} (A \to \neg A) \to \neg A$ (Batens, De Clercq, and Kurtonina's definition).
- Логика $\mathbf{L}$ называется параполной, е. и т.е. для некоторой формулы A верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} (\neg A \to A) \to A$ (Ciuciura's definition).

Сильная логика Клини $\mathbf{K_3}$ (1938)

$\{\neg, \wedge, \vee\}$-фрагмент логики Лукасевича. Можно определить импликацию $A \to_K B = \neg A \vee B$

$\to_K$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	1	1

Задача: проверить, верно ли правило модус поненс для $\to_K$? Верно ли оно при двух выделенных значениях?

Паранепротиворечивые логики

- Логика **L** называется паранепротиворечивой, е. и т.е. для некоторых формул A и B верно, что $A, \neg A \not\models_{\mathbf{L}} B$ (Priest's definition).
- Логика **L** называется паранепротиворечивой, е. и т.е. для некоторой формулы A верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} \neg(A \wedge \neg A)$ (Da Costa's definition).
- Логика **L** называется паранепротиворечивой, е. и т.е. для некоторых формул A и B верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} A \to (\neg A \to B)$ (Jaśkowski's first definition).
- Логика **L** называется паранепротиворечивой, е. и т.е. для некоторых формул A и B верно, что $\not\models_{\mathbf{L}} A \to (\neg A \to (\neg\neg A \to B))$ (Jaśkowski's second definition).

Логика парадокса Асеньо (1966) и Приста (1979)

$\mathbf{K_3}$ с двумя выделенными значениями известна как логика парадокса **LP**. В **LP** можно найти такие формулы A и B, что $A, \neg A \not\models_{\mathbf{LP}} B$.
Задача: найти формулу A, такую, что для некоторой оценки в **LP** $v(A) = v(\neg A)$.

Множество общезначимых формул **LP** равно множеству общезначимых формул классической логики высказываний. Но множества утверждений о следовании этих двух логик не совпадают (вспомним, что $A, \neg A \not\models_{\mathbf{LP}} B$ и $A, \neg A \models_{\mathbf{CPL}} B$). (Теорема дедукции не имеет места в **LP**).

Пусть $\mathbf{Ł_3^2}$ — логика $\mathbf{Ł_3}$ с двумя выделенными значениями. Задача: найти формулу A, такую, что она общезначима в классической логике высказываний, но не общезначима в $\mathbf{Ł_3^2}$.

- $\models_{\mathbf{CPL}} \neg(p \to \neg p) \lor \neg(\neg p \to p)$
- $\not\models_{\mathbf{Ł}_3^2} \neg(p \to \neg p) \lor \neg(\neg p \to p)$

Логика Гейтинга $\mathbf{G_3}$

A	$\neg_H$
1	0
$1/2$	0
0	1

$\to_H$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\wedge$ и $\vee$ — как в $\mathbf{Ł_3}$. Через $\neg_H$ и $\to_H$ в $\mathbf{G_3}$ нельзя определить $\wedge$ и $\vee$. Но $\vee$ можно определить через $\to_H$ и $\wedge$:

$$A \vee B = ((A \to_H B) \to_H B) \wedge ((B \to_H A) \to_H A).$$

$\not\models_{\mathbf{G_3}} \neg_H \neg_H A \to_H A$, $\not\models_{\mathbf{G_3}} A \vee \neg_H A$.
$\mathbf{G_3}$ можно аксиоматизировать как расширений интуитиционистской логики любой из следующих аксиом:

- $(\neg_H A \to_H B) \to_H (((B \to_H A) \to_H B) \to_H B)$
- $(A \to_H B) \vee (B \to_H C) \vee (C \to_H D)$

$\mathbf{G_3}$ vs $\mathbf{Ł_3}$

Все связки $\mathbf{G_3}$ выразимы в $\mathbf{Ł_3}$:

- $\neg_H A = \neg(\neg A \to A)$
- $A \to_H B = \neg_H(\neg(A \to B)) \vee B = ((A \to B) \to A) \to A$

При этом $\neg$ не выразимо в $\mathbf{G_3}$. Однако добавление $\neg$ к $\mathbf{G_3}$ даёт множество функций логики $\mathbf{Ł_3}$.

$$A \to B = (A \to_H B) \wedge (\neg B \to_H \neg A)$$

Слабая логика Клини $\mathbf{K_3^w}$ (1938)

Отрицание определяется как в $\mathbf{K_3}$.

$\vee_W$	1	1/2	0
1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge_W$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0

$\to_W$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1

В $\mathbf{K_3^w}$ 1 выделенное значение. Её версия с двумя выделенными значениями называется **PWK** (Paraconsistent Weak Kleene logic). Задача: являются ли $\wedge_W$ и $\vee_W$ коммутативными операциями в $\mathbf{K_3^w}$ и **PWK**?

Другие импликации

$\to_R$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_B$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_T$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	$1/2$
0	1	1	1

$\to_{mC}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	1	1	1

- $\to_R$ импликация Решера (1969).
- $\to_B$ импликация Бочвара (1938).
- $\to_T$ импликация Томовой (2012).
- $\to_{mC}$ импликация МакКарти (1963).

Импликации, которые можно добавить в логику **LP**

$\to_H$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_R$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_{So}$	1	$1/2$	0
1	1	0	0
$1/2$	1	$1/2$	0
0	1	1	1

$\to_J$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	$1/2$	0
0	1	1	1

$\to_C$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	$1/2$	0
0	1	1	1

$\to_{Se}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

$\to_{TK}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

$\to_V$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
0	$1/2$	$1/2$	$1/2$

$\to_{Co}$	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	$1/2$	0
0	$1/2$	$1/2$	$1/2$

- $\to_H$ и $\to_R$ импликации Гейтинга и Решера.
- $\to_{So}$ импликация Собочиньского (1952).
- $\to_J$ импликация Слупецкого/Яськовского (1936, 1948).
- $\to_C$ импликация Карниелли (2000).
- $\to_{Se}$ импликация Сетте (1973).
- $\to_{TK}$ импликация Томовой и Карпенко (2017).
- $\to_V$ импликация Видаля (2014).
- $\to_{Co}$ импликация Купера (1968).

Логика Сетте и Кариниелли $\mathbf{I^1}$

A	$\neg_H$
1	0
$^1/_2$	0
0	1

$\vee_B$	1	$^1/_2$	0
1	1	1	1
$^1/_2$	1	0	0
0	1	0	0

$\wedge_B$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	0	0	0
0	0	0	0

$\to_B$	1	$^1/_2$	0
1	1	0	0
$^1/_2$	1	1	1
0	1	1	1

Параполная логика с классическим позитивным фрагментом.

Логика Сетте $\mathbf{P^1}$

A	$\neg_B$
1	0
$1/2$	1
0	1

$\vee_{Se}$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	1	1
0	1	1	0

$\wedge_{Se}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	0	0	0

$\rightarrow_{Se}$	1	$1/2$	0
1	1	1	0
$1/2$	1	1	0
0	1	1	1

Паранепротиворечивая логика с классическим позитивным фрагментом.

Логика Поста (1921) $\mathbf{P_3}$

A	$\neg_P A$	$\neg_D A$
1	$1/2$	0
$1/2$	0	1
0	1	$1/2$

$\vee$	1	$1/2$	0
1	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$
0	1	$1/2$	0

- В $\mathbf{P_3}$ есть только две связки: $\neg_P$ и $\vee$.
- 1 единственное выделенное значение в $\mathbf{P_3}$.
- $\mathbf{P_3}$ — функционально полная логика.
- Пусть $\mathbf{DP_3}$ логика со связками $\neg_D$ и $\vee$ и двумя выделенными значениями (1 и $1/2$). $\mathbf{DP_3}$ — функционально полная логика.

Свойства отрицания Поста

Формулы, общезначимые в $\mathbf{P_3}$, но не в **CPL**. Например,

$$\models_{\mathbf{P_3}} \neg\neg\neg(p \vee \neg p \vee \neg\neg p),$$

но

$$\not\models_{\mathbf{CPL}} \neg\neg\neg(p \vee \neg p \vee \neg\neg p).$$

Формулы, общезначимые в **CPL**, но не в $\mathbf{P_3}$. Например,

$$\models_{\mathbf{CPL}} p \vee \neg p,$$

но

$$\not\models_{\mathbf{P_3}} p \vee \neg p.$$

- $p \models_{\mathbf{P_3}} \neg\neg\neg p$ и $\neg\neg\neg p \models_{\mathbf{P_3}} p$
- $p \not\models_{\mathbf{CPL}} \neg\neg\neg p$ и $\neg\neg\neg p \not\models_{\mathbf{CPL}} p$
- $p \not\models_{\mathbf{P_3}} \neg\neg p$ и $\neg\neg p \not\models_{\mathbf{P_3}} p$
- $p \models_{\mathbf{CPL}} \neg\neg p$ и $\neg\neg p \models_{\mathbf{CPL}} p$

- $\models_{\mathbf{DP_3}} p \vee \neg\neg p$
- $\not\models_{\mathbf{CPL}} p \vee \neg\neg p$
- $\models_{\mathbf{CPL}} \neg\neg(p \vee \neg p)$
- $\not\models_{\mathbf{DP_3}} \neg\neg(p \vee \neg p)$

- $A = \neg\neg\neg A$ (в $\mathbf{P_3}$ и $\mathbf{DP_3}$)
- $\neg_P A = \neg_D \neg_D A$
- $\neg_D A = \neg_P \neg_P A$

Разновидности закона исключенного третьего и непротиворечия

(1) $p,\ \neg p \models_{\mathbf{P_3}} q,\ \ p,\ \neg\neg p \models_{\mathbf{P_3}} q$;
(2) $p,\ \neg p, \neg\neg p \models_{\mathbf{P_3}} q$;
(3) $\not\models_{\mathbf{P_3}} p \vee \neg p,\ \ \not\models_{\mathbf{P_3}} p \vee \neg\neg p$;
(4) $\models_{\mathbf{P_3}} p \vee \neg p \vee \neg\neg p$;
(5) $p, \neg p \not\models_{\mathbf{DP_3}} q,\ \ p, \neg\neg p \not\models_{\mathbf{DP_3}} q$;
(6) $p, \neg p, \neg\neg p \models_{\mathbf{DP_3}} q$;
(7) $\models_{\mathbf{DP_3}} p \vee \neg p,\ \ \models_{\mathbf{DP_3}} p \vee \neg\neg p$;
(8) $\models_{\mathbf{DP_3}} p \vee \neg p \vee \neg\neg p$.

Логика Белнапа и Данна **FDE** (First Degree Entailment). Выделенные значения: T и B

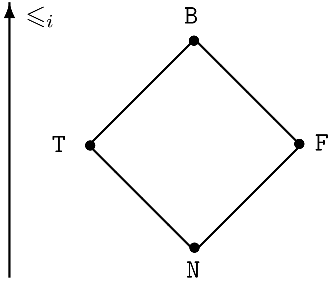
A	$\neg$
T	F
B	B
N	N
F	T

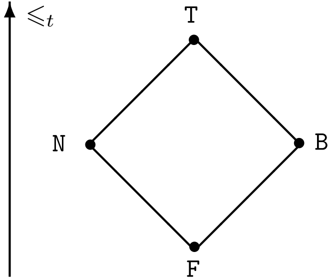
$\wedge$	T	B	N	F
T	T	B	N	F
B	B	B	F	F
N	N	F	N	F
F	F	F	F	F

$\vee$	T	B	N	F
T	T	T	T	T
B	T	B	T	B
N	T	T	N	N
F	T	B	N	F

- $A, \neg A \not\models_{\mathbf{FDE}} B$
- $\not\models_{\mathbf{FDE}} A \vee \neg A$, $\not\models_{\mathbf{FDE}} \neg(A \wedge \neg A)$

- T — истинно,
- B — одновременно истинно и ложно,
- N — не истинно и не ложно,
- F — ложно.


$\leqslant_i$
B
T
F
N


$\leqslant_t$
T
N
B
F

A	$-$
T	T
B	N
N	B
F	F

$\otimes$	T	B	N	F
T	T	T	N	N
B	T	B	N	F
N	N	N	N	N
F	N	F	N	F

$\oplus$	T	B	N	F
T	T	B	T	B
B	B	B	B	B
N	T	B	N	F
F	B	B	F	F

- $\neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B$, $\neg A \vee \neg B \models \neg(A \wedge B)$
- $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$, $\neg A \wedge \neg B \models \neg(A \vee B)$
- $\neg(A \oplus B) \models \neg A \oplus \neg B$, $\neg A \oplus \neg B \models \neg(A \oplus B)$
- $\neg(A \otimes B) \models \neg A \otimes \neg B$, $\neg A \otimes \neg B \models \neg(A \otimes B)$
- $-(A \oplus B) \models -A \otimes -B$, $-A \otimes -B \models -(A \oplus B)$
- $-(A \otimes B) \models -A \oplus -B$, $-A \oplus -B \models -(A \otimes B)$
- $-(A \vee B) \models -A \vee -B$, $-A \vee -B \models -(A \vee B)$
- $-(A \wedge B) \models -A \wedge -B$, $-A \wedge -B \models -(A \wedge B)$

Литература по многозначной логике

- Карпенко, А.С. Развитие многозначной логики. ЛКИ, Москва, 2014.
- Gottwald, S. A treatise of many-valued logics. Baldbook: Reseacrh Studies Press. 2001.
- Hähnle, R. Advanced many-valued logic. Handbook of Philosophical Logic, vol. 2, p 297-395. Springer. 2001.
- Lau, D. Function algebras on finite sets: A basic course on many-valued logic and clone theory. Springer, 2006.
- Urquhart, A. Basic many-valued logic. Handbook of Philosophical Logic, vol. 2, p 249-295. Springer. 2001.

Спасибо за внимание!