

**Часть I. (К более сложным файлам Lyubetsky_графы
на [http://lpcs.math.msu.su/~lyubetsky/2019/.](http://lpcs.math.msu.su/~lyubetsky/2019/))**

Определения. *Общим графом* называется (неориентированный) граф, состоящий из циклов, петель, цепей и точек (=изолированных вершин). Каждому ребру и некоторым точкам приписана пометка a или b . Три одноимённых подряд расположенных ребра запрещены. Некоторые рёбра, расположенные на краях цепей, подчёркнуты и тогда называются *висячими*. Запрещена цепь из двух висячих рёбер. Крайняя вершина у подчёркнутого ребра, помеченная точка, вершина при петле и вершина между одноимёнными рёбрами aa или bb называется *сингулярной*. Остальные вершины и точки называются *обычными*. Общий граф, состоящий из циклов ab и точек без пометки, называется *финальным* или *в финальной форме*.

Над общим графом определяются следующие **пять операций**. *Двойная переклейка (DM, рис. 1a)*: удаление двух одинаково помеченных рёбер и соединение четырёх образовавшихся концов двумя новыми рёбрами с той же пометкой. Если операция выполняется с участием петли, то её вершина рассматривается как имеющая два конца. Если образовалось три одноимённых подряд ребра aaa или a -висячее соединено с a -точкой или соединены две a -точки (соединение происходит обязательно a -ребром), то соответственно среднее ребро или соединяющее a -ребро отождествляется с его концами. В результате получается aa или a -висячее ребро или a -точка (=объединение сингулярных вершин). Также – с заменой a на b .

Полуторная переклейка (SM, рис. 1b): удаление ребра и добавление ребра с той же пометкой, соединяющего один из образовавшихся свободных концов со свободным краем ребра с альтернативной пометкой или со свободным краем висячего ребра/ сингулярной точкой с той же пометкой (с возможным объединением сингулярных вершин).

Одиная склейка (OM): добавление a -ребра между свободными вершинами, каждая из которых – обычная присоединённая к b -ребру или точка, a -висячая или a -точка; с возможным объединением двух сингулярных вершин (Рис. 1с, справа налево и Рис. 1с'). Также – с заменой a на b .

Разрез (Cut, Рис. 1с, слева направо): удаление любого ребра. Перечисленные операции назовём *стандартными*.

Определяется *дополнительная операция* – удаление (**Rem**) сингулярной вершины (Рис. 1d, d', d"). А именно, если её степень 2, она удаляется и инцидентные ей ребра отождествляются в ребро с той же пометкой; если её степень 1, то она удаляется вместе с инцидентным ей ребром; если её степень 0 или она имеет петлю, то вершина и петля удаляются.

Каждой операции *приписана цена* – строго положительное число. Цепочку с минимальной суммарной ценой операций, приводящий общий граф G к финальному виду, назовём *кратчайшей*. Эта цена называется *минимальной* и обозначается $C(G)$.

Проблема. Дан общий граф G и цены пяти операций. Найти кратчайшую цепочку, приводящую G к финальной форме.

Сначала делайте это угадыванием, потом нужно будет найти линейный по времени работы алгоритм, который делает это универсально.

Суммарная цена операций в цепочке, выдаваемой таким алгоритмом, называется *алгоритмической* и обозначается $s(G)$. Конечно, $C(G) \leq s(G)$ и хотелось бы оценить разность $s(G) - C(G)$. Если она равна 0, то алгоритм называется *точным* (=точно решающим исходную задачу). Если эту разность можно оценить сверху независимо от входных данных, то алгоритм называется с *гарантированной точностью*. Такой также неплохо придумать. А потом равнозначная

Проблема: запрограммировать такой алгоритм для суперкомпьютерной платформы. Потом применить его к реальным (из прикладной области) данным на суперкомпьютере.

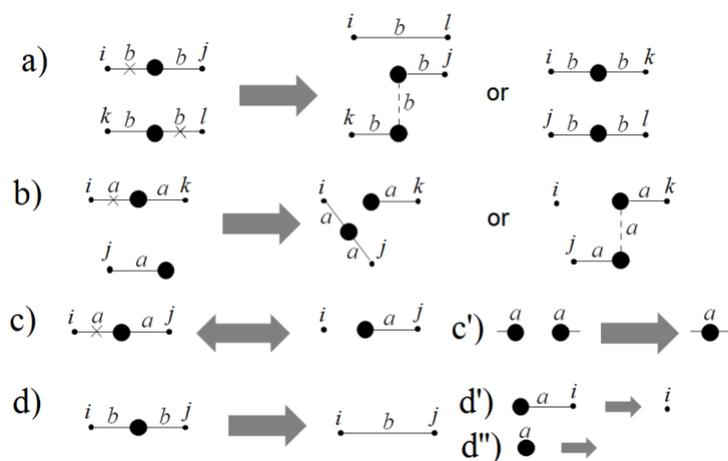


Рис. 1. Операции над общим графом G .

Задача 1. Привести общий граф G из **циклов и петель** (=циклический случай) к финальному виду двумя операциями **DM** (двойная переклейка) и **Rem** (удаление сингулярной вершины) (добавление остальных операций не уменьшит минимальную цену) при одном из указанных условий на цены:

Графы:

1. $(abab)$,
2. $(aabab)$,
3. $(aabbab)$,
4. $(aabbaab)$,
5. $(aabbaabb)$.

Последняя задача для третьего и четвертого вариантов цен более сложная.

6. цикл (abb) и b -петля,
7. два цикла (baa) ,
8. два цикла (abb) и $(aabb)$,
9. два цикла $(aabb)$,
10. цикл $(aabbaabbaabb)$.

Цены:

- 1) всех операций 1 (= все цены равны, т.е. без цен),
Далее цена двойной переклейки 1 и
- 2) удаления равна 0.5,
- 3) удаления 1.5,
- 4) удаления 2.5,
- 5) удаления a -вершины 1 и b -вершины 1.5.

Задача 2. Привести общий граф G из **цепей и точек** к финальному виду всеми пятью операциями **DM, SM, OM, Cut, Rem** при одном из указанных условий на цены:

Графы:

1. $abbaa$.
2. $abba$.
3. $bbaab$.
4. $baabba$.
5. aab и bba .
6. $bbaabb$ и сингулярная b -точка.
7. baa и $abba$.
8. bba и aa .

9. \underline{ab} и $aabb$.

10. \underline{ab} и $bb\underline{a}$.

11. две цепи aab .

12. aab , $aabb$ и сингулярная a -точка.

13. две цепи aab и сингулярная a -точка.

Цены:

1) всех операций 1 (= все цены равны, т.е. без цен),

2) стандартных операций 1, удаления 0.5.