Как привести пример «сложных» подмножеств ***X*** натурального ряда? «Простыми» подмножествами можно считать,например, **алгоритмически перечислимые** (= множество значений некоего алгоритма, который на каждом $n \in \mathbb{N}$ выдаёт какое-либо $m \in \mathbb{N}$). Или шире: **ординально определимые**. Конечно, **почти все** подмножества неперечислимые (по мощности и по естественной мере). Но нужен такой индивидуальный пример.

Такой пример приводится на слайдах 2-3 для одного ч-у множества ***P*** над $\mathbb{N}$ и искомое ***X*** есть его ***P***-множество.

Аналогично и для других ч-у множеств ***P*** , некоторые из них тесно связаны со случайными величинами (как на слайде 4).

Для одного конкретного ч-у множества ***P*** «опишем» индивидуальное ***P***-вещест. число ***a*** $\subseteq \mathbb{N}$, которое ***a*** $\notin$ **L**. Элементом в ***P*** является конечное множество ***p*** записей вида «$n \in \underline{\boldsymbol{a}}$» и $m \notin \underline{\boldsymbol{a}}$», где $\underline{\boldsymbol{a}}$ имя (=«описание»=«формула» для будущего множества ***a***) и n и m – любые натуральные числа без их повторений (т.е. запрещено $5 \in \underline{\boldsymbol{a}}$ и $5 \notin \underline{\boldsymbol{a}}$), с порядком по включению; наименьший элемент – пустое множество.

Определим предикат **вынуждение** $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi$: $\boldsymbol{p} \Vdash n \in \boldsymbol{a}$ означает, что (запись) «$n \in \underline{\boldsymbol{a}}$» $\in \boldsymbol{p}$; и $\boldsymbol{p} \Vdash \neg\, \varphi$ означает $\forall \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{p}\ \neg\ (\boldsymbol{p} \Vdash \varphi)$.

Пусть φ_n – нумерация «всех» суждений о **L**[***G***]. Начнём с любого $\boldsymbol{p}_0 \leq \ldots \leq \boldsymbol{p}_n \leq \ldots$, где $(\boldsymbol{p}_n \Vdash \varphi_n)$ или $(\boldsymbol{p}_n \Vdash \neg\, \varphi_n)$. Тогда «случайное» = ***P***-вещест. число это $\boldsymbol{a} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists n\ (\boldsymbol{p}_n \Vdash \text{«}n \in \underline{\boldsymbol{a}}\text{»})\} \subseteq \mathbb{N}$

Доказательство, что $\boldsymbol{a} \notin \mathbf{L}$.

Допустим $\mathbf{L}[\boldsymbol{a}] \vDash \boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}$. Тогда $\exists \boldsymbol{p} \Vdash \boldsymbol{x}=\underline{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{p}$ из $\boldsymbol{a}$.

Пусть $n \in x$, $n \notin \boldsymbol{p}$ и $\exists \boldsymbol{q}=\boldsymbol{p} \cup \{n \notin \underline{\boldsymbol{a}}\}$, образуем $\mathbf{L}[\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{q}$ из $\boldsymbol{b}$.

Пусть $n \notin x$, $n \notin \boldsymbol{p}$ и $\exists \boldsymbol{q}=\boldsymbol{p} \cup \{n \in \underline{\boldsymbol{a}}\}$, образуем $\mathbf{L}[\boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{q}$ из $\boldsymbol{b}$.

В обоих случаях противоречие.

Тогда $\mathbb{N} = x \cup Cx$ содержится в $\boldsymbol{p}$. Противоречие.

Здесь исторически очень старая борьба счётного с несчётным

и использование конечного против бесконечного.

Сейчас она преодолевается переходом к элементарной

счётное подмодели или

переходом к булевозначным моделям в $\mathbf{L}$.

Можно указать другое ч-у множество $\boldsymbol{P}$, для которого в

$\mathbf{L}[\boldsymbol{G}] \models$

«**все проективные** (вообще все) **множества измеримы** в польских пространствах (= гомеоморфное полному метрическому пространству со счётным плотным подмножеством),

И **все проективные** (вообще все) **функции измеримы**.

Проективные множества – элементы наименьшего σ-кольца, замкнутого на проектирование в польских пространствах. Отсюда определяются проективные отображения. Саму модель $\mathbf{L}[\boldsymbol{G}]$ можно построить в терминах измеримых мн-в.