В лаборатории 6
«Математические методы и модели в биоинформатике»
присутствуют две математические темы:

1) «Эффективная теория множеств»
(В. Кановей, В. Любецкий)
и
2) «Дискретная оптимизация»
(К. Горбунов, В. Любецкий).

Сегодня расскажем о 1-й теме на примере нашего решения проблемы А. Тарского, поставленной Тарским и остававшейся открытой с 1948 года до 2022 года.

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

[3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2

[4] V. Kanovei and V. Lyubetsky, The full basis theorem does not imply analytic wellordering. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2021, Vol. 172, No. 4, Article 102929, P. 1–46. DOI. Методы к Теореме 2

[5] В. Кановей и В. Любецкий, Модели теории множеств, в которых теорема отделимости неверна. *Известия РАН, Серия математическая*, 2021, том 85, №6, С. 164–204. DOI. То же

Равенство = определение

$$X = \{y \mid \varphi(y)\}$$

содержит объекты принципиально разной природы:

множества X , y и

свойство = формула = предикат = строка = слово φ .

Проблема Тарского, как и многие другие, это – вопрос об отношении множеств и свойств = формул.

Тарский рассматривал структуру T :

$$\boxed{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n \quad \begin{cases} \dots & \dots \\ \text{—} & n+1\text{-й уровень } T_{n+1} = \mathscr{P}(T_n) \\ \text{—} & n\text{-й уровень } T_n \\ \dots & \dots \\ \text{—} & 2\text{-й уровень } T_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ \text{—} & 1\text{-й уровень } T_1 = \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \boxed{\mathbb{R}} \\ \text{—} & 0\text{-й уровень } T_0 = \mathbb{N} \end{cases}$$

С этой структурой связаны формулы вида: все обычные связки и кванторы, свои переменные для каждого уровня, отношения $x_n \in y_{n+1}$ между соседними уровнями, и на 0-м уровне обычные формулы арифметики. Итак, имеется арифметика, позже итерация множества множеств. Тарский рассматривает множества

$$\mathbf{D}^1_n = \{ x \in T_1 = \mathbb{R} : \exists\, \varphi_{\leq n} \,\forall j \; (j \in x \Longleftrightarrow \varphi_{\leq n}(j)) \} \subsetneqq \mathbb{R},$$

где запись $\varphi_{\leq n}$ означает, что в формуле φ все переменные в кванторах только по уровням $n' \leq n$, т.е. $i_1, \dots, i_k \leq n$ в $\varphi := Qz_1 \in T_{i_1} \dots Qz_k \in T_{i_k} \psi(z_1, \dots, z_k, j)$, где ψ бескванторная.

Тарский указал формулу $\Phi_{\leq n+1}$, которая определяет $\mathbf{D}^1_n$. В $\Phi_{\leq n}$, как и во всех $\varphi_{\leq n}$, допускается любое число любых кванторов до уровня n.

Проблема (Тарский, 1948)

Для данного $n \geq 1$, верно ли, что «$\mathbf{D}^1_n$ определяется какой-то формулой $\Phi_{\leq n}(x)$, т. е. $\forall x \in \mathbb{R}\,(x \in \mathbf{D}^1_n \iff \Phi_{\leq n}(x))$»?

Утверждение в кавычках обозначим $(^*)_n$.

Множество (или класс) $\boldsymbol{M}$ назовем моделью, если $\boldsymbol{M} \models \mathbf{ZFC}$ (= вся математика).

Тарский: в модели $\mathbf{L} \models$ «$\neg(^*)_n$, т.е. нет $\Phi_{\leq n}$, определяющей $\mathbf{D}^1_n$».

Отсюда дилемма: во всякой модели $\boldsymbol{M} \models \neg(^*)_n$, или $\exists\,\boldsymbol{M} \models (^*)_n$»?

Проблема (переформулировка, Тарский, 1948)

Для данного n, верно ли $(^*)_n$ (т.е. $\mathbf{D}^1_n$ определяется какой-то формулой $\Phi_{\leq n}$) хоть в какой-то модели $\boldsymbol{M}$?

Ординал определяется с помощью операций $+1$ и lim:

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \mathbb{N} = \omega_0, \ldots, \omega_1, \ldots, \omega_2, \ldots = \mathrm{On}.$$

Во всех моделях множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \omega_0$ одинаково.

Гёдель определил структуру $\mathbf{L}$:

$$\begin{array}{lcl}
\ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{L}_\alpha & = & \text{все } \; X \subseteq \mathbf{L}_{<\alpha}, \quad \mathbf{L}_{<\alpha} \models y \in X \Longleftrightarrow \varphi(y, \underbrace{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}_{\gamma_i < \alpha;\, \gamma_i, \alpha \in \mathrm{On}}), \\
\end{array}$$

где $\mathbf{L}_{<\alpha} = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbf{L}_\gamma$, а φ – любая формула в языке теории множеств с единственным отношением $x \in y$;

$$\begin{array}{lcl}
\ldots & \ldots & \ldots \\
\mathbf{L}_0 & = & \{\varnothing\};
\end{array}$$

$$\mathbf{L} = \bigcup_\alpha \mathbf{L}_\alpha .$$

Пусть $G \subseteq \mathbf{L}$, но $G \notin \mathbf{L}$. Такие G существуют!
Аналогично определяют структуру $\mathbf{L}[G]$:

$$
\begin{array}{lcl}
\dots & \dots & \dots \\
\mathbf{L}_\alpha[G] & = & \text{все } X \subseteq \mathbf{L}_{<\alpha},\ \mathbf{L}_{<\alpha} \models y \in X \iff \varphi(y, G, \underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_n}_{\gamma_i < \alpha}),
\end{array}
$$

где $\mathbf{L}_{<\alpha} = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbf{L}_\gamma$, а φ – любая формула в том же языке теории множеств;

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
\dots & \dots & \dots \\
\mathbf{L}_\beta[G] & : & G \subseteq \mathbf{L}_\beta \Longrightarrow G \in \mathbf{L}_{\beta+1} \quad \text{(наименьшее такое } \beta\text{);} \\
\dots & \dots & \dots \\
\mathbf{L}_0[G] & = & \{\varnothing\};
\end{array}
\right.
$$

$$\mathbf{L}[G] = \bigcup_\alpha \mathbf{L}_\alpha[G].$$

Главное, что все $\mathbf{L}[G]$ модели.

Суммируем результаты о которых шла речь.

Теорема (Гёдель)

$\forall G$, $\mathbf{L}[G] \models$ **ZFC** *(= вся математика), т.е. все* $\mathbf{L}[G]$ *– модели.*

Теорема (Тарский)

$\forall n \geq 1\ \exists \Phi_{\leq n+1}$ *«*$\mathbf{D}^1_n$ *определяется формулой* $\Phi_{\leq n+1}$*».*

Теорема (Гёдель – Тарский)

$\forall n \geq 1$ ($\mathbf{L} \models$ *«*$\mathbf{D}^1_n$ *не определяется никакой формулой* $\Phi_{\leq n}$*»).*

Теперь следует наша первая теорема:

Теорема 1 (Кановей – Любецкий, решение проблемы Тарского)

$\forall n \geq 1\ \exists G$ ($\mathbf{L}[G] \models (^*)_n$, *и даже* *«*$\mathbf{D}^1_n$ *определяется формулой* $\Phi_{\leq 1}$*»).*

Рассматриваются частично упорядоченные множества $\boldsymbol{P}$ с *несравнимыми элементами* и наименьшим элементом **0** (растут вверх).

Теорема 1 получена методом Коэна: если дано частично упорядоченное множество $\boldsymbol{P} \in \mathbf{L}$ $(p, q, r \in \boldsymbol{P})$, то определяется G:

$$p \leq q \in G \Longrightarrow p \in G, \quad p, q \in G \Longrightarrow \exists r \in G(p, q \leq r),$$

$$\forall D \in \mathbf{L}, D \subseteq \boldsymbol{P}\Big[\underbrace{\forall p \exists q \in D(p \leq q)}_{D \text{ плотное в } \boldsymbol{P}} \Longrightarrow G \cap D \neq \varnothing\Big].$$

Важно, что запас таких D ограничен подмножествами в $\boldsymbol{P}$, которые принадлежат $\mathbf{L}$!

Множество G назовём $\boldsymbol{P}$*-генерическим* (*над* $\mathbf{L}$); или $\boldsymbol{P}$*-множеством* (*над* $\mathbf{L}$). Такие G существуют!

Отсюда определяется структура $\mathbf{L}[G]$, которая называется $\boldsymbol{P}$-расширением $\mathbf{L}$.

Наше доказательство теоремы 1: нашли $P_0 \in \mathbf{L}$, взяли любое P_0-множество F, нашли $P \in \mathbf{L}$, взяли любое P-множество G над $\mathbf{L}[F]$, для которых:

$$\mathbf{L}[F, G_F] \models (^*)_n,$$

для заданного n, где $G_F \in \mathbf{L}[F, G]$ — проекция G в $\mathbf{L}[F, G]$.

Нами также рассмотрен вопрос,
который вряд ли даже возникал во время Тарского:
для <u>любого</u> наперёд заданного множества $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{N}$
в некоторой структуре $\mathbf{L}[G]$ выполняется:

$$\mathbf{L}[G] \models \quad n \in \boldsymbol{U} \iff (^*)_n\,, \quad n \notin \boldsymbol{U} \iff \neg(^*)_n\,, \quad \mathbf{ZFC}\,.$$

Напомним: множество $\boldsymbol{U}$ называется алгоритмически разрешимым, если существует алгоритм,
который на $n \in \boldsymbol{U}$ выдаёт 1 и на $n \notin \boldsymbol{U}$ выдаёт 0.

Теорема 2 (Кановей – Любецкий)

Для любого <u>разрешимого</u> множества $\boldsymbol{U}$, $\exists\, G$,
$$\mathbf{L}[G] \models \quad n \in \boldsymbol{U} \iff (^*)_n, \quad n \notin \boldsymbol{U} \iff \neg(^*)_n, \quad \mathbf{ZFC}.$$

Набросок доказательства Теоремы 1.

Рассмотрим множество $\boldsymbol{P}_0$ всех f: $\mathbf{N} \rightarrowtail \mathbf{R}$ частично-определённых биекций f с конечной областью определения и естественным отношением порядка. Относительно $\boldsymbol{P}_0$ образуем $\boldsymbol{P}_0$-множество $\boldsymbol{F}$ и структуру $\mathbf{L}[\boldsymbol{F}]$. Обозначим $\mathbf{R}+ = \mathbf{R} \cap \mathbf{L}$.

Тогда $\mathbf{L}[\boldsymbol{F}] \models \boldsymbol{F}$: $\mathbf{N} \leftrightarrow \mathbf{R}+$. ■

Нами построены ч.-уп. множества $\{P_{jk}(n) \in \mathbf{L} \mid j,k \in \mathbf{N}\}$,

***n* – фиксированная граница уровней кванторов**,

положим $P(n) = \prod_{j,k} P_{jk}(n) \in \mathbf{L}$ и рассмотрим P –множество

$G \subseteq P(n)$ относительно $\mathbf{L}[F]$, а в нём $\boxed{G_F = pr_{j \in F(k)} G} \in \mathbf{L}[F,G]$ и подструктуру = модель $\mathbf{L}[F,G_F] \subseteq \mathbf{L}[F,G]$

со свойствами:

$\mathbf{L}[F,G_F] \vDash$

(1) $\forall j,k \in \mathbf{N} \quad [j \in F(k) \;\Leftrightarrow\; \exists P_{jk}$–**множество** над $\mathbf{L}$], где

$\exists P_{jk}$– … **эквивалентна** $\varphi_{\leq n}(j)$, для всякого фиксированного k , и

(2) $\forall\{p_i \in P, \ldots p_i \leq p_{i+1} \leq \ldots \leq p, \exists p \in P\}$.

Теорема 1 утверждает:

$$L[F,G_F] \models \forall x \in R \ \ (\exists \varphi_{\leq n} \ (x = \{j | \varphi_{\leq n}(j)\}) \quad \Leftrightarrow \ \Phi_{\leq n}(x)) \ .$$

Фактически мы доказали больше:

$$L[F,G_F] \models \forall x \in R \ \ (\exists \varphi_{\leq n} \ (x = \{j | \varphi_{\leq n}(j)\}) \quad \Leftrightarrow \ x \in R_{+}) \ ,$$

где правая часть $x \in R_{+}$ есть **искомая** формула $\Phi_{\leq 1}$

с 2-мя ЕА-кванторами (имеет более! чем требуемый вид).

Осталось проверить саму эквивалентность.

Справа налево. Пусть $\boldsymbol{X} \in \mathbf{R+}$ ~~и~~ $\cancel{\boldsymbol{X} = \{j \mid \varphi_{\leq n}(j)\}}$.

Тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k})$, где $k \in \mathbf{N}$; и по свойству (1)

$\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{j} \mid \exists\, \boldsymbol{P_{jk}}$ **–множество**$\}$, этот предикат, определяющий $\boldsymbol{x}$, опять по свойству (1) есть искомая формула $\varphi_{\leq n}$.

Слева направо. Пусть $X \in R$ **и** $X = \{j | \varphi \leq n(j)\}$.

Лемма 1. $X \in L[G]$ (избавились от F).

Каждое множество $X \in \mathbf{L}[G]$ имеет **имена** $\underline{X} \in \mathbf{L}$.

В нижеследующей теореме Коэна имена выбираются

следующим образом.

Именем натурального числа j называется оно само $\underline{j} = j$.

Именем вещественного числа называется

любое подмножество вида $\underline{X} \subseteq P \times \mathbf{N}$.

Теорема (Коэн)

a *Для всякого вещественного числа* X *в* $\mathbf{L}[G]$, $\exists$ (*не единственное!*) *имя* $\underline{X} \in \mathbf{L}$, *для которого,* $\forall j$,

$$\big(\mathbf{L}[G] \models j \in X\big) \iff \exists p \in G\,(p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \in \underline{X}»),$$

где $\Vdash_{\mathbf{L}}$ — *отношение вынуждения, которое определяется алгоритмически, вычислительно (трансфинитной индукцией) в* $\mathbf{L}$ *для любого заданного ч-у множества* $\boldsymbol{P} \in \mathbf{L}$.

b $p, q \in \boldsymbol{P}$, $p \leq q$, $p \Vdash_{\mathbf{L}} \Psi \implies q \Vdash_{\mathbf{L}} \Psi$.

Продолжим доказательство Теоремы 1.

Берем имя $\underline{X} \in \mathbf{L}$ из Леммы 1 и пункта a теоремы Коэна.

$\forall j \in \mathbb{N}$, множ-во $D_j = \{p \in \boldsymbol{P} : p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \in \underline{X}»$ или $p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \notin \underline{X}»\}$ плотно в $\boldsymbol{P}$ и принадлежит $\mathbf{L}$.

По свойству (2), $D = \bigcap_j D_j \in \mathbf{L}$ также плотно в $\boldsymbol{P}$.

По определению G, найдется $p \in G \cap D$.

Тогда, по определению D, $\forall j$, $p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \in \underline{X}»$ или $p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \notin \underline{X}»$.

Отсюда по пункту a теоремы Коэна

$$(\mathbf{L}[G] \models j \in X) \iff \mathbf{L} \models (p \Vdash_{\mathbf{L}} «j \in \underline{X}»).$$

Правая часть определяет $X' \in \mathbf{L}$, которое равнообъемно с X. Итак, $X \in \mathbb{R}^+$. □

Идея доказательства Теоремы 2.

Дано алгоритмически разрешимое множество $\boldsymbol{U}$; например, множество нечётных чисел.

Для $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{U}$ пусть $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$ – то ч-у множество, для которого в расширении $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{F}}]$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{n}) \subset \boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$, **выполняется** $(^*)_{\boldsymbol{n}}$. Это $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{n})$ произведение как выше.

Образуем их произ. $\boldsymbol{P} = \prod_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{U}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{n})$ с покоординатным порядком и <u>его</u> $\boldsymbol{G}^* \subset \boldsymbol{P}$. Тогда $\forall n\in\boldsymbol{U}$ **выполняется** $(^*)_{\boldsymbol{n}}$ в расширении $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}^*_{\boldsymbol{F}}]$, $\boldsymbol{G}^*_{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{PR}_{\boldsymbol{j}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k})}\, \boldsymbol{G}^*$, так как $\boldsymbol{G}^*$ действует на эти $\boldsymbol{n}$ независимо. И одновременно $\forall n\notin\boldsymbol{U}$ в этом же $\boldsymbol{L}[\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}^*_{\boldsymbol{F}}]$ выполняется $\neg(^*)_{\boldsymbol{n}}$, так как об этих $\boldsymbol{n}$ такое $\boldsymbol{G}^*$ «ничего не говорит».

Док-во в конце доклада после точных определений.■

Оставшаяся часть доказательства Теоремы 1 состоит в

определении $P(n) = \prod_{j,k} P_{jk}(n)$, n$\geq$1.

Это делается с помощью развитой нами **комбинаторной техники** для работы с функциями вида $\alpha \to \alpha$, где α ординал. И в частности, с вещественными числами

$\omega 0 \to \omega 0$.

Сейчас определим проще устроенное начало этой

последовательности $P = P(1) = \prod_{j,k} P_{jk}(1)$.

Матрица $\boldsymbol{U}_{jk}$, $j,k \in \mathbf{N}$ = в её ячейках лежат «**системы**» из

$\leq\omega1$-функции f_{jk} : $\omega1 \to \omega1$, которые пустые или **плотные** в

множестве всех функций $\omega1 \to \omega1$;

и $\boldsymbol{U}_{jk} \cap \boldsymbol{U}_{lk} = \emptyset$ при $j \neq l$.

Эта матрица $\omega0 \times \omega0$.

Обозначим **Sys** множество всех таких матриц; и

Sys$_{<k}$ – часть таких матриц, у которой все ячейки до столбца

$<\boldsymbol{k}$ (для всех строк) пустые.

Обозначим матрицу $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{jk}$.

$\boldsymbol{U} \preccurlyeq \boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{U}$ продолжается by $\boldsymbol{V}$), если $\forall j,k\ (\boldsymbol{U}_{jk} \subseteq \boldsymbol{V}_{jk})$.

В структуре **L** строится $\preccurlyeq$-возрастающая

последовательность систем $\boldsymbol{U}(\alpha)$, $\alpha<\omega 2$,

с двумя условиями, которые указаны ниже.

Сначала нужно определить

код ординала $\beta \in \omega 2$ и

код последовательности столбцов $\{\boldsymbol{t}_\beta\}$ в матрицах $\boldsymbol{U}$.

Для ординала $\forall\alpha \in \omega 1$ **кодом** назовём <u>число</u> $\boldsymbol{x} = \{<m,n> \mid 2^m \cdot 3^m \in \boldsymbol{x}\}$, если так задаваемый порядок изоморфен α.

Для $\forall\beta \in \omega 2$ **кодом** назовём <u>множество</u> $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbf{R}$, которое аналогично задаёт β.

Ячейка $\boldsymbol{U}_{jk}$ матрицы $\boldsymbol{U}$ содержит $\leq\omega 1$ функций вида $\omega 1 \to \omega 1$. Используя коды счётных ординалов, получим **код ячейки** как множество $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbf{R}$.

Кодом столбца в $\boldsymbol{U}_{jk}$ назовём свёртку множеств-кодов ячеек.

Код последовательности $\{\boldsymbol{t}_\beta\}$, где $\boldsymbol{t}_\beta$ столбец в $\boldsymbol{U}$ и $\beta\in\omega 2$, – **множество множеств** в **R** = элемент 3-го уровня в иерархии **T**

Напомним $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{jk}$. Упомянутые свойства нужной нам последовательности матриц $\{\boldsymbol{U}(\alpha) \mid \alpha\in\omega 2\}$:

Пусть фиксировано $\boldsymbol{k}\in\mathbf{N}$: $\boldsymbol{U}(\alpha,\boldsymbol{k})$ = «$\boldsymbol{k}$-й столбец в $\boldsymbol{U}(\alpha)$» и $\boldsymbol{U}(\alpha,<\boldsymbol{k})$ = «обнуление всех ячеек до $\boldsymbol{k}$-го столбца в $\boldsymbol{U}(\alpha)$».

Тогда, $\forall \boldsymbol{k}\in\mathbf{N}$:

(A) $\boldsymbol{L} \models$ «$\{\boldsymbol{U}(\alpha,\boldsymbol{k}) \mid \alpha\in\omega 2\}$ определима формулой 2-го уровня с k+3 кванторами»; [$\exists$ код, для которого ..]

(B) $\boldsymbol{L} \models$ «$\forall \mathbf{D}$ [$\subseteq \mathrm{Sys}_{<k}$, определимого формулой 2-го уровня с k+2 кванторами и параметрами 2-го уровня] $\exists\alpha\in\boldsymbol{\omega 2}$ [$\boldsymbol{U}(\alpha,<\boldsymbol{k}) \in \mathrm{D}$ ИЛИ $\forall \boldsymbol{V} \in \mathbf{D}$ $(\boldsymbol{U}(\alpha,<\boldsymbol{k}) \not\leq \boldsymbol{V})$] » .

Смысл условия (B): для $\forall$ **D** $\subseteq$ **Sys**$_{<k}$ $\exists\alpha$

($\boldsymbol{U}(\alpha)$ в **D** ИЛИ решительно вне **D**) . ■

Лемма 2. $\boldsymbol{L} \models \exists \{\boldsymbol{S}(\alpha) \subseteq \alpha \mid \alpha \in \omega 2)$

(I) $\{\boldsymbol{S}(\alpha)\}$ определима формулой 2-го уровня с 1-м квантором;

(II) $\forall X \subseteq \omega 2$ $\exists$ последовательность ординалов $\{\alpha\}$ конфинальная $\omega 2$, для которой $X \cap \alpha = \boldsymbol{S}(\alpha)$. ■

Смысл (II): таких $\boldsymbol{X}$ всего $\omega 3$, а шагов угадывания $\omega 2$, т.е. $\forall \boldsymbol{X}$ [$\boldsymbol{S}(\alpha)$ много раз угадывает множество $\boldsymbol{X}$ на ординале из $\{\alpha\}$]. ■

После этого системы $\boldsymbol{U}(\alpha)$ **определяются** по этим $\boldsymbol{S}(\alpha)$.

По $\boldsymbol{U}(\alpha)$ определяем $\boldsymbol{U}_{jk} = \cup_\alpha \boldsymbol{U}_{jk}(\alpha)$. Наконец,

$\boldsymbol{P}_{jk} = \langle \boldsymbol{S}, \boldsymbol{H} \rangle$, где $\boldsymbol{S}$ ($\subseteq$ ($\bigcup_{\xi<\omega 1} \{s : \xi \to \omega 1\}) \setminus \varnothing$) и $\boldsymbol{H}$ ($\subseteq \boldsymbol{U}_{jk}$) и оба счётные.

Функции из $\boldsymbol{S}$ назовём *короткими*, т.е. $\boldsymbol{S}$ множество ***коротких*** функций, а $\boldsymbol{H}$ – множество ***длинных*** функций.

$\boldsymbol{P}_{jk} \leq \boldsymbol{Q}_{jk} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{S}p \subseteq \boldsymbol{S}q$, $\boldsymbol{H}p \subseteq \boldsymbol{H}q$, $\forall \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}p\ \forall \boldsymbol{s} \in (\boldsymbol{S}q \setminus \boldsymbol{S}p)$ ($\boldsymbol{s} \nsubseteq \boldsymbol{f}$).

Порядок в $P = \prod_{j,k} P_{jk}$ покоординатный. ■

Пусть $\boldsymbol{G}$ P–множество, $\boldsymbol{G} \subseteq \boldsymbol{P}$, а $\boldsymbol{G_{jk}}$ – проекция G на координату jk. Тогда $\boldsymbol{G_{jk}} \subseteq \boldsymbol{P_{jk}}$ и $\boldsymbol{P_{jk}}$–множество;

$\boldsymbol{P_{jk}}$ (и соот-но G_{jk}) состоят из пар $<S_{jk},H_{jk}>$.

Обозначим $\boldsymbol{S^*_{jk}}$ = множество всех коротких функций из 1-х членов всех пар в $\boldsymbol{G_{jk}}$, это $\boldsymbol{S^*_{jk}}$ удовлетворяет свойству

[$h\restriction\alpha$ = начало функ-и h до α]

(**S_{jk}): $\forall h(\in \boldsymbol{U_{jk}}) : \omega1 \to \omega1$ ({$\alpha \in \omega1 \mid h\restriction\alpha \in \boldsymbol{S^*_{jk}}$}

не конфинально $\omega1$).

Используя свойства (A)-(B) последовательности $\boldsymbol{U}(\alpha)$, получим

$\mathbf{L}[F,G_F] \vDash j \in F(k)$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ P_{jk} -множество $\Leftrightarrow$ $\exists$ S_{jk} (**S_{jk}).

Отсюда получим свойства (1)-(2) структур $\mathbf{L}[F,G_F]$.

Содержание последующего

К доказательству Теоремы 1 при произвольном $n \geq 1$.

К доказательству Теоремы 2.

Пусть $n > 1$ произвольно.

Теорема 1 при $n > 1$ на основе доказательства для $n = 1$

Пусть $n > 1$ произвольно.

В $\mathbf{L}$, определяется ч-у множество $\boldsymbol{P}(n) = \prod_{j,k\in\omega} \boldsymbol{P}_{jk}(n) \in \mathbf{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, подобное $\boldsymbol{P}$ из доказательства Теоремы 1 (при $n = 1$), но с кардиналами $\omega_{\boldsymbol{n}}, \omega_{\boldsymbol{n}+1}$ вместо ω_1, ω_2.

Теорема 1 при $n > 1$ на основе доказательства для $n = 1$

Пусть $n > 1$ произвольно.

В $\mathbf{L}$, определяется ч-у множество $\boldsymbol{P}(n) = \prod_{j,k \in \omega} \boldsymbol{P}_{jk}(n) \in \mathbf{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, подобное $\boldsymbol{P}$ из доказательства Теоремы 1 (при $n = 1$), но с кардиналами ω_n, ω_{n+1} вместо ω_1, ω_2.

Взяли любое $\boldsymbol{P}_0$-множество F и любое $\boldsymbol{P}(n)$-множество G над $\mathbf{L}[F]$, взяли проекцию $G_F = \prod_{j \in F(k)} G_{jk}(n) \in \mathbf{L}[F, G]$, и тогда $\mathbf{L}[F, G_F] \models (^*)_n$.

Падение T-уровня

Это важный элемент доказательства, на который мы сошлемся.

Падение T-уровня

Это важный элемент доказательства, на который мы сошлемся.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 именно при $n = 1$.

Падение T-уровня

Это важный элемент доказательства, на который мы сошлемся.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 именно при $n = 1$.

Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ опускается на T-уровень 1.

Падение T-уровня

Это важный элемент доказательства, на который мы сошлемся.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 именно при $n = 1$.

Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ опускается на T-уровень 1.

Почему это так?

ДАНО:

(A) $L \models \{U(\alpha,k) \mid \alpha \in \omega 2\}$ определима формулой 2-го уровня

ТРЕБУЕТСЯ:

$\mathbf{L}[F, G_F] \models$

(1) $\forall j, k \in \mathbf{N}$ $[j \in F(k)$ $\Leftrightarrow$ $\exists P_{jk}$**–множество**], где

$\exists P_{jk}$**– … эквивалентна** $\varphi_{\leq n}(j)$, для всякого фиксированного k

ТРЕБУЕТСЯ:

формула уровня 1 при n=1

$\mathbf{L}[F,G_F] \models$

(1) $\forall j,k \in \mathbf{N}$ $[j \in F(k) \Leftrightarrow \exists P_{jk}$–**множество**], где

$\exists P_{jk}$– … **эквивалентна** $\varphi_{\leq n}(j)$, для всякого фиксированного k

Падение T-уровня при смещении мощностей

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.

Падение T-уровня при смещении мощностей

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Почему это так?

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Почему это так?

$F : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ — биекция. Она делает мощность $\aleph_1^{\mathbf{L}} = |\mathbb{R}^+|$ в модели $\mathbf{L}$ счетной в $\mathbf{L}[F]$.

Падение T-уровня при смещении мощностей

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Почему это так?

$F : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ — биекция. Она делает мощность $\aleph_1^{\mathbf{L}} = |\mathbb{R}^+|$ в модели $\mathbf{L}$ счетной в $\mathbf{L}[F]$.

$\boxed{\text{Смещение мощностей: } \aleph_{n+1}^{\mathbf{L}} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{\mathbf{L}[F, G_F]}}$.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Почему это так?

$F : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ — биекция. Она делает мощность $\aleph_1^{\mathbf{L}} = |\mathbb{R}^+|$ в модели $\mathbf{L}$ счетной в $\mathbf{L}[F]$.

Смещение мощностей: $\aleph_{n+1}^{\mathbf{L}} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{\mathbf{L}[F,G_F]}$.

Падение T-уровня: $(T_{n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\mathbf{L}[F,G_F]}$.

Вернемся к доказательству Теоремы 1 при $n = 1$.
Ключевая конструкция, которая в $\mathbf{L}$ происходит на T-уровне 2, в модели $\mathbf{L}[F, G_F]$ падает на уровень 1 — **т.е. усиливается**.

Почему это так?

$F : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ — биекция. Она делает мощность $\aleph_1^{\mathbf{L}} = |\mathbb{R}^+|$ в модели $\mathbf{L}$ счетной в $\mathbf{L}[F]$.

Смещение мощностей: $\aleph_{n+1}^{\mathbf{L}} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{\mathbf{L}[F,G_F]}$.

Падение T-уровня: $(T_{n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\mathbf{L}[F,G_F]}$.

В частности $(n = 1)$, определимость уровня T_2 в $\mathbf{L}$ падает до определимости уровня T_1 в $\mathbf{L}[F, G_F]$.

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\boldsymbol{C}[n] =$ все 1-1 функции $f : \mathtt{dom}\, f \to \aleph_n$, $\mathtt{dom}\, f \subseteq \omega$ конечно;

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\boldsymbol{C}[n] =$ все 1-1 функции $f : \operatorname{dom} f \to \aleph_n$, $\operatorname{dom} f \subseteq \omega$ конечно;
$\boldsymbol{C}[\omega+1] =$ все 1-1 функции $f : \operatorname{dom} f \to \aleph_{\omega+1}$, $\operatorname{dom} f \subseteq \omega$ конечно.

Теорема 2: ч-у множества

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\boldsymbol{C}[n] =$ все 1-1 функции $f : \mathrm{dom}\, f \to \aleph_n$, $\mathrm{dom}\, f \subseteq \omega$ конечно;
$\boldsymbol{C}[\omega+1] =$ все 1-1 функции $f : \mathrm{dom}\, f \to \aleph_{\omega+1}$, $\mathrm{dom}\, f \subseteq \omega$ конечно.

Эти ч-у множества подобны множеству $\boldsymbol{P}_0$ из доказательства Теоремы 1, они определяются в $\mathbf{L}$.

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\boldsymbol{C}[n] =$ все 1-1 функции $f : \operatorname{dom} f \to \aleph_n$, $\operatorname{dom} f \subseteq \omega$ конечно;
$\boldsymbol{C}[\omega{+}1] =$ все 1-1 функции $f : \operatorname{dom} f \to \aleph_{\omega+1}$, $\operatorname{dom} f \subseteq \omega$ конечно.

Эти ч-у множества подобны множеству $\boldsymbol{P}_0$ из доказательства Теоремы 1, они определяются в $\mathbf{L}$.

. . . .

Также в $\mathbf{L}$, вводятся ч-у множества $\boldsymbol{P}[n] = \prod_{j,k\in\omega} \boldsymbol{P}_{jk}[n] \in \mathbf{L}$,
$n = 1, 2, 3, \ldots$, подобные множеству $\boldsymbol{P}$ из доказательства Теоремы 1 при $n = 1$, но с кардиналом $\aleph_{\omega+n}$ вместо $\aleph_1 = \omega_1$.

Теорема 2: ч-у множества

$\aleph_\xi = \omega_\xi$ – ξ-й несчетный кардинал, $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$,
$\aleph_\xi = \{\alpha : \alpha < \aleph_\xi\}$ — множество всех меньших ординалов.

$\boldsymbol{C}[n] =$ все 1-1 функции $f : \mathrm{dom}\, f \to \aleph_n$, $\mathrm{dom}\, f \subseteq \omega$ конечно;
$\boldsymbol{C}[\omega{+}1] =$ все 1-1 функции $f : \mathrm{dom}\, f \to \aleph_{\omega+1}$, $\mathrm{dom}\, f \subseteq \omega$ конечно.

Эти ч-у множества подобны множеству $\boldsymbol{P}_0$ из доказательства Теоремы 1, они определяются в **L**.

. . . .

Также в **L**, вводятся ч-у множества $\boldsymbol{P}[n] = \prod_{j,k\in\omega} \boldsymbol{P}_{jk}[n] \in \mathbf{L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, подобные множеству $\boldsymbol{P}$ из доказательства Теоремы 1 при $n = 1$, но с кардиналом $\aleph_{\omega+n}$ вместо $\aleph_1 = \omega_1$.

$\boldsymbol{P}[n]$ имеет T-уровень определимости $\boldsymbol{\omega+n+1}$ (вместо $\mathbf{2}$) в **L**.

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega+1] \times \prod_{n\geq 1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\geq 1} \boldsymbol{P}[n]$.

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}\left[\,F,\ F[1],\ F[2],\ldots,\ G[1],\ G[2],\ldots\right], \quad \text{где} \tag{1}$$

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение **L** имеет вид

$$\mathbf{L}\left[F, F[1], F[2], \dots, G[1], G[2], \dots \right], \quad \text{где} \tag{1}$$

биекция $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$, $\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge 1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge 1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение **L** имеет вид

$$\mathbf{L}\left[\, F, F[1], F[2], \dots, G[1], G[2], \dots \right], \quad \text{где} \tag{1}$$

биекция	F	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$	,	$\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,
биекция	$F[n]$	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_n$	,	$\boldsymbol{C}[n]$-генерическая,

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}\left[\, F, \; F[1], \; F[2], \ldots, \; G[1], \; G[2], \ldots \right], \quad \text{где} \tag{1}$$

биекция	F	$:$	$\omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$	,	$\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,
биекция	$F[n]$	$:$	$\omega \leftrightarrow \aleph_n$	,	$\boldsymbol{C}[n]$-генерическая,
множество	$G[n]$	$=$	$\prod_{j,k\in\omega} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{P}[n]$-генерическое,

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.
$\mathbb{Q}$-генерическое расширение $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}\big[\,F,\ F[1],\ F[2],\dots,\ G[1],\ G[2],\dots\big]\,,\quad \text{где} \tag{1}$$

биекция	F	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$	,	$\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,
биекция	$F[n]$	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_n$	,	$\boldsymbol{C}[n]$-генерическая,
множество	$G[n]$	$=$	$\prod_{j,k\in\omega} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{P}[n]$-генерическое,
каждое	$G_{jk}[n]$	,	$j,k\in\omega$	,	$\boldsymbol{P}_{jk}[n]$-генерическое.

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}\big[\, F,\ F[1],\ F[2],\ \dots,\ G[1],\ G[2],\ \dots \big], \quad \text{где} \tag{1}$$

биекция	F	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$	,	$\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,
биекция	$F[n]$	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_n$	,	$\boldsymbol{C}[n]$-генерическая,
множество	$G[n]$	$=$	$\prod_{j,k\in\omega} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{P}[n]$-генерическое,
каждое	$G_{jk}[n]$	,	$j,k\in\omega$	,	$\boldsymbol{P}_{jk}[n]$-генерическое.
проекция	$G[n]_{F[n]}$	$=$	$\prod_{j\in F[n](k)} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{n} = 1,2,3,\dots$.

Теорема 2: модель

Берем ч-у множество $\mathbb{Q} = \boldsymbol{C}[\omega{+}1] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{C}[n] \times \prod_{n\ge1} \boldsymbol{P}[n]$.

$\mathbb{Q}$-генерическое расширение $\mathbf{L}$ имеет вид

$$\mathbf{L}\left[F, F[1], F[2], \dots, G[1], G[2], \dots\right], \quad \text{где} \tag{1}$$

биекция	F	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$	,	$\boldsymbol{C}[\omega{+}1]$-генерическая,
биекция	$F[n]$	:	$\omega \leftrightarrow \aleph_n$	,	$\boldsymbol{C}[n]$-генерическая,
множество	$G[n]$	$=$	$\prod_{j,k\in\omega} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{P}[n]$-генерическое,
каждое	$G_{jk}[n]$	,	$j, k \in \omega$	,	$\boldsymbol{P}_{jk}[n]$-генерическое.
проекция	$G[n]_{F[n]}$	$=$	$\prod_{j\in F[n](k)} G_{jk}[n]$	,	$\boldsymbol{n = 1, 2, 3, \dots}$.

Лемма 3

Теорема 2 верна в модели $\boldsymbol{M} = \mathbf{L}\left[F, \langle F[n]\rangle_{n\in U}, \langle G[n]_{F[n]}\rangle_{n\in U}\right]$ (подмодель модели (1)), *где* $U \subseteq \omega$ *— множество Теоремы 2.*

Теорема 2: доказательство

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Теорема 2: доказательство

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $M \models (*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph^{\mathbf{L}[F]}_n = \aleph^{M}_n$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $M \models (*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{M}$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Падение T-уровня: $(T_{\omega+n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{M}$.

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph^{\mathbf{L}[F]}_n = \aleph^{\boldsymbol{M}}_n$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Падение T-уровня: $(T_{\omega+n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\boldsymbol{M}}$.

Отсюда вспомогательная модель $\boldsymbol{M}_n = \mathbf{L}[F, F[n], G[n]_{F[n]}] \models (^*)_n$.

Теорема 2: доказательство

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph^{\mathbf{L}[F]}_n = \aleph^{\boldsymbol{M}}_n$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Падение T-уровня: $(T_{\omega+n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\boldsymbol{M}}$.

Отсюда вспомогательная модель $\boldsymbol{M}_n = \mathbf{L}[F, F[n], G[n]_{F[n]}] \models (^*)_n$.

Оказывается, что добавление любого множества из разных $F[m]$ и $G[n]$, $m \neq n$, к $\boldsymbol{M}_n$ не влияет на истинность $(^*)_n$, так что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Теорема 2: доказательство

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{\boldsymbol{M}}$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Падение T-уровня: $(T_{\omega+n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\boldsymbol{M}}$.

Отсюда вспомогательная модель $\boldsymbol{M}_n = \mathbf{L}\left[F, F[n], G[n]_{F[n]}\right] \models (^*)_n$.

Оказывается, что добавление любого множества из разных $F[m]$ и $G[n]$, $m \neq n$, к $\boldsymbol{M}_n$ не влияет на истинность $(^*)_n$, так что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Для $G[m]$, $m > n$, это следует из того, что в любом множестве $\boldsymbol{P}[m]$, $m > n$, возрастающие цепи длины $\leq \aleph_{\omega+n}$ мажорируются, а потому $G[m]$ не дает новых подмножеств $\aleph_{\omega+n}$ и новых элементов T_n.

Теорема 2: доказательство

Пусть $n \in U$; требуется доказать что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Смещение мощностей: $\aleph^{\mathbf{L}}_{\omega+n+1} \to \aleph_n^{\mathbf{L}[F]} = \aleph_n^{\boldsymbol{M}}$, т.к. $F : \omega \leftrightarrow \aleph_{\omega+1}$.

Падение T-уровня: $(T_{\omega+n+1})^{\mathbf{L}} \to (T_n)^{\mathbf{L}[F]}$ и $(T_n)^{\boldsymbol{M}}$.

Отсюда вспомогательная модель $\boldsymbol{M}_n = \mathbf{L}[F, F[n], G[n]_{F[n]}] \models (^*)_n$.

Оказывается, что добавление любого множества из разных $F[m]$ и $G[n]$, $m \neq n$, к $\boldsymbol{M}_n$ не влияет на истинность $(^*)_n$, так что $\boldsymbol{M} \models (^*)_n$.

Для $G[m]$, $m > n$, это следует из того, что в любом множестве $\boldsymbol{P}[m]$, $m > n$, возрастающие цепи длины $\le \aleph_{\omega+n}$ мажорируются, а потому $G[m]$ не дает новых подмножеств $\aleph_{\omega+n}$ и новых элементов T_n.

Для $G[m]$, $m < n$, и всех $F[m]$, это следует из того, что множества $\boldsymbol{P}[m]$, $m < n$, и все $\boldsymbol{C}[m]$, имеют мощность $\le \aleph_{\omega+n}$.

Теорема 2: доказательство, окончание

Пусть $n \notin U$; требуется доказать что $M \models \neg(^*)_n$.

Пусть $n \notin U$; требуется доказать что $M \models \neg(^*)_n$.

Аналогично предыдущему, но берем $M_n := \mathbf{L}[F]$,

Теорема 2: доказательство, окончание

Пусть $n \notin U$; требуется доказать что $\mathbf{M} \models \neg(^*)_n$.

Аналогично предыдущему, но берем $\mathbf{M}_n := \mathbf{L}[F]$,
где $(^*)_n$ **ложна**, как и в $\mathbf{L}$,

Теорема 2: доказательство, окончание

Пусть $n \notin U$; требуется доказать что $M \models \neg(^*)_n$.

Аналогично предыдущему, но берем $M_n := \mathbf{L}[F]$, где $(^*)_n$ **ложна**, как и в $\mathbf{L}$, поскольку ч-у множество $C[\omega+1]$, для которого F является генерической функцией, однородно, а потому не порождает новых определимых вещественных чисел.

Пусть $n \notin U$; требуется доказать что $M \models \neg(^*)_n$.

Аналогично предыдущему, но берем $M_n := \mathbf{L}[F]$,
где $(^*)_n$ **ложна**, как и в **L**,
поскольку ч-у множество $C[\omega+1]$, для которого F является генерической функцией, однородно, а потому не порождает новых определимых вещественных чисел.

Однородность означает, что любые два верхних конуса порядково изоморфны.

Публикации по докладу

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

[3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2

Публикации по докладу

[1] A. Tarski, A problem concerning the notion of definability. *Journal of Symbolic Logic*, 1948, Vol. 13, pp. 107–111. Постановка проблемы

[2] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski. *Mathematics*, 2020, Vol. 8, No. 12, Art. 2214, P. 1–36. DOI. Теорема 1

[3] V. Kanovei and V. Lyubetsky, On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. *Transactions of Amer. Math. Soc.*, 2022, Vol. 375, No. 12, P. 8651–8686, DOI. Теоремы 1 и 2

[4] V. Kanovei and V. Lyubetsky, The full basis theorem does not imply analytic wellordering. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2021, Vol. 172, No. 4, Article 102929, P. 1–46. DOI. Методы к Теореме 2

[5] В. Кановей и В. Любецкий, Модели теории множеств, в которых теорема отделимости неверна. *Известия РАН, Серия математическая*, 2021, том 85, №6, С. 164–204. DOI. То же

Tarski [1] page 110

If, however, we discuss the problem whether the set $D_{n,p}$ is a member of $D_{n+1,p}$, we arrive at conclusions analogous to those obtained for the sets D_n : the solution of the problem is positive for $n = 0$, is negative for $n \geqq 2$, and the problem is open for $n = 1$

Logic Colloquium

European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic

BOOK OF ABSTRACTS

Adam Mickiewicz University in Poznań

19-24 July 2021

Poznań, Poland

Содержание I

Содержание II