

λ -исчисление, соответствие Карри – Говарда

1. Докажите, что если $u \rightarrow_{\beta} v$, то множество свободных переменных терма u содержит множество свободных переменных терма v . Бывает ли это включение строгим?
2. Существуют ли такие замкнутые λ -термы u и v , что $u \rightarrow_{\beta} v$, при этом терм v типизуем, а u — нет?
3. Постройте замкнутые λ -термы следующих типов: **а)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$; **б)** $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$; **в)** $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$; **г)** $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$; **д)** $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$; **е)** $((((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$.
4. Пусть (бесконечный) контекст Γ равен $\{x_1 : p_1, x_2 : p_2, \dots\}$, где p_i — различные примитивные типы. Для данного типа τ постройте такой терм T_{τ} , что $\Gamma \vdash T_{\tau} : \sigma$ тогда и только тогда, когда $\tau = \sigma$.
5. Постройте комбинаторный терм, имеющий тип $(\tau \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\sigma \rightarrow \nu) \rightarrow (\tau \rightarrow \nu))$.
6. Докажите, что если N — замкнутый терм в нормальной форме, имеющий тип $\tau \rightarrow ((\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau)$, то N имеет вид $\lambda x. \lambda f. f^n x$, где n — некоторое натуральное число. (Запись $f^n x$ означает $f(f \dots (fx) \dots)$, n раз.)
7. Выведите из теоремы о слабой нормализуемости следующее: не существует замкнутого λ -терма типа $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$.