Занятие 7

Вычислимые функции и алгоритмы Объем понятия «вычислимая функция» — это те функции, которые можно запрограммировать.

Основной вопрос: какими средствами, какой язык программирования? Желаемый ответ, который не удается формализовать, — следует допустить использование всех языков программирования, даже тех, которые пока не придумали.

Наблюдение, которое несколько упрощает дело: все имеющиеся языки допускают компиляцию в один, очень простой. В качестве такого простого языка можно выбрать, например, ассемблер, машины Тьюринга, алгоритмы Маркова и др. . "Запас вычислимости" оказывается одним и тем же! Но эти простые языки очень неудобны для реального программирования. **Условимся понимать термин «вычислимость» неформально — как программируемость на одном из известных вам универсальных языков программирования (напр., C).**

Вход/Выход. Ограничиваемся подмножествами множества Σ^* всех слов в алфавите Σ и вычислимыми частичными функциями из Σ^* в Σ^*. Напр., $\Sigma = \{0,1\}$. Имеется представление $\Sigma^* = \{\Lambda, S(\Lambda), S(S(\Lambda)), \ldots\}$, где S — вычислимая функция, а также вычислимые в обе стороны биекции между $(\Sigma^*)^2$ и Σ^*. Указанное представление позволяет использовать Σ^* также и в качестве N: число n представляется словом $S^n(\Lambda)$. Аналогично, слова в алфавите Σ можно использовать в качестве представления пар слов, пар чисел, и т.д..

Пошаговость вычислительного процесса. Алгоритмические вычисления развиваются в дискретном времени по шагам. Каждый шаг обязательно заканчивается и алгоритм однозначно определяет, какой шаг будет следующим. Тем самым, вычисление может оказаться бесконечным ("зациклиться") лишь в случае бесконечного числа шагов. Будем предполагать, что любое вычисление можно алгоритмически промоделировать на заданное число шагов ("трассировка").

1. Для $\Sigma = \{0,1\}$ описать алгоритмы вычисления S и биекций. (В качестве описания алгоритма подходит любая инструкция, которую понятно как запрограммировать на любом из известных языков программирования.)

Определение. Множество $A \subseteq \Sigma^*$ называется *разрешимым*, если вычислима его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in \Sigma^* \setminus A \end{cases}.$$

2. Проверить разрешимость множеств:
   - всех нечетных чисел;
   - данного конечного множества слов;
   - множества всех обратимых 2×2-матриц с коэффициентами из N.
   Взять $\Sigma = \{0, 1, \#\}$.

3. Если $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ — вычислимая частичная функция, у которой нет тотального вычислимого продолжения (пример на лекции), то ее область определения неразрешима.

Определение. Множество $A \subseteq \Sigma^*$ называется *перечислимым*, если
(**Вар. 1**, перечислимость) A есть область значений некоторой вычислимой функции.
(**Вар. 2**, уточнение 1) A есть область значений некоторой тотальной вычислимой функции или $A = \emptyset$.
(**Вар. 3**, полуразрешимость) A есть область определения некоторой вычислимой функции. Т.к. значения функции тут несущественны, то это эквивалентно требованию вычислимости полухарактеристической функции

$$\pi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \text{не определено}, & x \in \Sigma^* \setminus A \end{cases}.$$

(Вариант 1) $\Leftrightarrow$ (Вариант 2) $\Leftrightarrow$ (Вариант 3)

4. Проверить перечислимость множеств:

   (а) каждого разрешимого множества;
   (б) множества всех натуральных чисел, представимых в виде разности квадратов двух чисел;

5. Если множество $A \subseteq \Sigma^*$ и его дополнение $\Sigma^* \setminus A$ перечислимы, то оба они разрешимы. (Использовать Вар. 3 — как из двух полухарактеристических функций собрать одну характеристическую.)

6. Доказать, что класс всех разрешимых подмножеств Σ^* замкнут относительно операций объединения, пересечения и дополнения.

7. Доказать, что класс всех перечислимых подмножеств Σ^* замкнут относительно операций объединения, пересечения. (Нет замкнутости относительно дополнения.)

8. Установить эквивалентность 1-го и 2-го вариантов определения перечислимости. (Воспользоваться существованием вычислимой биекции $\Sigma^* \to (\Sigma^*)^2$.)

9. Заметить, что проекции "плоского" перечислимого множества $R \subseteq (\Sigma^*)^2$ на оси являются перечислимыми. Доказать, что каждое полуразрешимое множество можно представить в виде проекции некоторого "плоского" разрешимого множества. В качестве следствия установить, что 3-й вариант определения эквивалентен первым двум.

Домашнее задание

10. Пусть тотальная вычислимая функция f монотонна в следующем смысле: если слово u является собственным началом слова v, то $f(u)$ — собственное начало слова $f(v)$. Доказать разрешимость области значений функции f.

11. Доказать, что каждое бесконечное перечислимое множество можно представить в виде множества значений тотальной вычислимой инъекции. (Перечисление без повторений.)

12. Перечислимые множества A и B являются областями значений заданных вычислимых функций f и g. Построить аналогичное представление для множеств $A \cup B$, $A \cap B$. Обосновать вычислимость построенных функций.

13. Сформулировать и решить аналог задачи 12 для перечислимых множеств, представленных областями определения вычислимых функций.

14. (Теорема о графике) Доказать, что функция f является вычислимой тогда и только тогда, когда ее график $\{(x, y) \mid f(x) = y\}$ перечислим.