Занятие 6

Принцип компактности для логики предикатов 1-го порядка. *Множество замкнутых формул (теория) выполнимо тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество выполнимо.*

1. Доказать принцип компактности.

Множество замкнутых формул T в языке 1-го порядка с равенством называется *теорией первого порядка с равенством*, если из T выводимы все аксиомы равенства:

$$\forall x(x = x), \quad \forall x \forall y(x = y \to y = x), \quad \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z),$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n$$
$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \ \to\ f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)), \qquad \text{для } f \in Fn,$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n$$
$$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \ \to\ (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))), \quad \text{для } P \in Pr.$$

При изучении теорий с равенством обычно ограничиваются только *нормальными* интерпретациями языка — где символ равенства интерпретируется стандартно, как совпадение. Соответственно модифицируется понятие логического следования ($\Gamma \models F$, если нет нормальной интерпретации, в которой все формулы из Γ истинны, а F ложна). При этом теорема о корректности и полноте, а также следующий из нее принцип компактности, остаются верными.

2. Пусть T — теория первого порядка с равенством, K — класс всех ее нормальных моделей (т.е. равенство интерпретируется стандартно).

   - Найти систему аксиом, нормальные модели которой — в точности все бесконечные модели из K.
   - Доказать, что если в классе K имеются модели сколь угодно большой конечной мощности, то в K имеется бесконечная модель.
   - Доказать, что в условиях предыдущей задачи подкласс $K_{fin} \subseteq K$, состоящий из всех конечных нормальных моделей теории T, невозможно аксиоматизировать (т.е. не существует множества формул Δ, для которого K_{fin} — в точности класс всех его нормальных моделей).

- Доказать, что в условиях предыдущей задачи подкласс $K_{inf} \subseteq K$, состоящий из всех бесконечных нормальных моделей теории T, нельзя конечно аксиоматизировать (т.е. не существует такого конечного множества формул Δ, для которого K_{inf} — в точности класс всех его нормальных моделей).

3. Пусть T — множество всех замкнутых формул языка арифметики, истинных в стандартной интерпретации на натуральном ряду (сигнатура $\{0, S(x), +, *, =\}$).

   - Доказать, что у T есть нормальная модель, которая неизоморфна стандартному натуральному ряду. (Такая модель называется нестандартной моделью арифметики.)
   - Заметить справедливость принципа переноса: если верное утверждение про (стандартные) натуральные числа выражено замкнутой формулой языка арифметики, то оно справедливо и для любой нестандартной арифметики. В частности, в нестандартной модели есть конечные числа 0, 1, 2, …, между которыми других чисел нет.
   - Доказать бесконечность множества галактик. (Галактикой называется подмножество нестандартной модели арифметики вида $\{x \mid |x - \alpha| \text{ — конечно}\}$.)

Домашнее задание

4. Написать систему аксиом в языке теории групп, нормальные модели которой суть

   - все группы порядка 6,
   - все бесконечные группы.

5. Доказать, что не существует системы аксиом в языке теории групп, нормальными моделями которой были бы в точности все конечные группы.

6. Аксиоматизировать поля характеристики k.

7. Доказать, что не существует системы аксиом в языке теории полей (язык 1-го порядка), нормальными моделями которой были бы в точности все поля всевозможных конечных характеристик $k > 0$.

8. Доказать, что в языке первого порядка класс всех бесконечных групп не является конечно аксиоматизируемым.

9. Доказать, что в нестандартной модели арифметики всевозможные суммы вида $x + y$, где x пробегает одну галактику, а y — другую, образуют галактику. Тем самым, галактики можно складывать. Показать, что аналогичным образом перемножать галактики нельзя.

10. Доказать, что в нестандартной модели арифметики отношение “$<$” на бесконечных галактиках — плотный линейный порядок без первого и последнего элемента. (Одна галактика меньше другой, если все элементы первой меньше всех элементов второй галактики. Почему любые две различные галактики сравнимы?)