

Занятие 4

Логика предикатов первого порядка (ЛП) Синтаксис языка первого порядка сигнатуры $\sigma = \langle Cnst, Fn, Pr \rangle$ обсуждался на предыдущем занятии.

Семантика. Выбираем множество $M \neq \emptyset$ (носитель) и интерпретацию I сигнатуры σ в M :

$$c \in Cnst \mapsto \bar{c} \in M, \quad f^n \in Fn \mapsto \bar{f}: M^n \rightarrow M, \quad P^n \in Pr \mapsto \bar{P} \subseteq M^n.$$

(Предикат $\bar{P}: M^n \rightarrow \{0, 1\}$ отождествлен с его областью истинности $\bar{P} \subseteq M^n$.)

Каждая *замкнутая* (т.е. без свободных переменных) формула становится обозначением для некоторого высказывания про конкретные (заданные интерпретацией) элементы, операции и отношения на множестве M . Оно оказывается истинным или ложным. Тем самым определяется истинность/ложность формулы в данной интерпретации (обозначение: $I \models \varphi$).

Пример. $\varphi = \forall x_0 \exists x_1 (P_3^2(x_0, x_1) \wedge P_0^1(x_1))$ (удобнее $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(y))$).

$$M := N, \quad \bar{P} := \{\langle x, y \rangle \mid x < y\}, \quad \bar{Q} := \{x \mid x \text{ простое число}\}.$$

Тогда φ выражает факт бесконечности множества простых чисел, поэтому $I \models \varphi$.

Изменим интерпретацию $\bar{P} := \{\langle x, y \rangle \mid x > y\}$. Тогда φ выражает ложное высказывание об отсутствии наименьшего простого числа, поэтому $I \not\models \varphi$.

Истинность/ложность незамкнутых формул $\varphi(\bar{x})$ в интерпретации I зависит от выбора значений свободных переменных \bar{x} . Чтобы фиксировать этот выбор, к интерпретации добавляют оценку свободных переменных $\theta: Var \rightarrow M$. Тогда $I, \theta \models \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow I \models \varphi(\theta(\bar{x}))$. (Все корректно? Подумать, как исправить.)

I. Выполнимость и общезначимость формул ЛП. Замкнутая формула называется выполнимой, если существует интерпретация, в которой она истинна. Общезначимость означает истинность во всех интерпретациях.

1. Исследовать на выполнимость и общезначимость:

$$\begin{aligned} & \exists x P(x, x) \\ & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \\ & \exists x \forall y \exists z P(x, y, z) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y, y) \\ & \exists y \forall x P(x, y, y) \rightarrow \forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \end{aligned}$$

II. Эквивалентность формул в ЛП. Основные эквивалентности:

- Все табличные эквивалентности логики высказываний.
- Вынесение кванторов:

$$Qx A(x) \text{ op } B \equiv Qx (A(x) \text{ op } B), \quad Q \in \{\forall, \exists\}, \text{ op} \in \{\wedge, \vee\}.$$

$$\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x), \quad \neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x).$$

- Переименование кванторов:
 $Qx A(x) \equiv Qy A(y)$ (y — новая переменная).

- Сокращение кванторов:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x)), \quad \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

- Фиктивный квантор: $\forall x A \equiv A, \quad \exists x A \equiv A$.

2. В каждом из четырех примеров вынести кванторы наружу:

$$Q_1 x A(x) \rightarrow Q_2 x B(x), \text{ где } Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}.$$

3. Сформулировать общий метод вынесения кванторов.

4. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

$$1) \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \quad 2) \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)) \quad 3) \exists y \forall x (P(x) \rightarrow Q(y))$$

$$4) \forall y \exists x (P(x) \rightarrow Q(y)) \quad 5) \exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \quad 6) \exists x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$$

5. Добавление. В реальной математике мы часто выходим за рамки языка ЛП (1-го порядка) в языки 2-го и больших порядков. Пример — перевод $I \models \forall \bar{x} \exists y Q(\bar{x}, y)$ в язык второго порядка с кванторами по функциям: $I \models \exists f \forall \bar{x} Q(\bar{x}, f(\bar{x}))$ (введение скульемовских функций). Пусть надо доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{R}^+ \models \forall \varepsilon \exists a \underbrace{\forall x (x > a \rightarrow (1/x) < \varepsilon)}_{Q(\varepsilon, a)}.$$

Вместо этого обычно ищут такую функцию $f(\varepsilon)$, для которой верно $\forall x (x > f(\varepsilon) \rightarrow (1/x) < \varepsilon)$, например, $f(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, т.е. доказывают

$$\mathbf{R}^+ \models \exists f \forall \varepsilon \forall x (x > f(\varepsilon) \rightarrow (1/x) < \varepsilon).$$

Это вполне корректный и работоспособный метод доказательства истинности формул ЛП в данной интерпретации.

Домашнее задание

6. Доделать предыдущее домашнее задание (про невыразимость).
7. Доделать задачу 1.
8. Доказать, что следующая формула выполнима только в бесконечных интерпретациях:
 $\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (\neg Q(x, x) \wedge (Q(x, y) \rightarrow (Q(y, z) \rightarrow Q(x, z))))).$
9. Доказать, что следующая формула истинна в каждой интерпретации с трехэлементным носителем:
 $\forall x \forall y \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \rightarrow R(x, y) \vee R(y, z))) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y).$
10. Уметь доказывать основные эквивалентности. Почему формул вынесения кванторов 4, а сокращения кванторов — только 2 ?
11. Доделать задачу 4.
12. Вынести кванторы наружу (привести к предваренной нормальной форме):

$$\neg \forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y).$$

$$\forall x \neg \exists y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y),$$

$$\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y).$$

13. С помощью введения скулемовских функций $z(x)$ и $u(x, y)$ установить истинность следующей формулы в стандартной интерпретации на натуральном ряду. (Символы “<”, “>” интерпретируются отношениями “меньше” и “больше”.)

$$\forall x \exists z \forall y \exists u ((y > z \rightarrow y > u) \wedge (u < z) \wedge \neg(u < x)).$$

Почему у скулемовских функций именно такие аргументы?