Занятие 2

Логическое и дедуктивное следования в ЛВ. Пусть Γ – множество формул, а F – формула логики высказываний.

Определение. Формула F *логически следует* из множества Γ (обозначение $\Gamma \models F$), если для каждой оценки пропозициональных переменных, обращающей все формулы из Γ в истину, формула F также оказывается истинной.

Определение. Формула F *дедуктивно следует* или *выводима* из множества Γ (обозначение $\Gamma \vdash F$) если у нее существует *формальный вывод* (определение см. ниже) из гипотез Γ.

Теорема о корректности и полноте исчисления высказываний утверждает эквивалентность этих понятий: $(\Gamma \models F) \quad \Leftrightarrow \quad (\Gamma \vdash F)$.

Использование. Построение формального вывода (док-во $\Gamma \vdash F$) является основным методом установить на практике, что $\Gamma \models F$.

Определение формального вывода в исчислении высказываний.

Аксиомы исчисления высказываний:

1) $A \to (B \to A)$, **2)** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

3) $A \wedge B \to A,\ A \wedge B \to B$, **4)** $A \to (B \to A \wedge B)$,

5) $A \to A \vee B,\ B \to A \vee B$, **6)** $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,

7) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$, **8)** $\neg\neg A \to A$.

Правило вывода: $A,\ A \to B \vdash B$ (MP, modus ponens).

Формальным выводом или просто *выводом* формулы F из гипотез Γ называется такая последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$, у которой $A_n = F$, а каждый член последовательности A_i является аксиомой или элементом Γ или получен из формул A_j и A_k с индексами $j, k < i$ по правилу (MP).

1. Построить вывод формулы $P \to P$.

$(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	(схема 2)
$P \to ((P \to P) \to P)$	(схема 1)
$(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$	(MP)
$P \to (P \to P)$	(схема 1)
$P \to P$	(MP)

2. Построить вывод формулы $Q \to P$ из гипотезы P.

3. Построить вывод формулы P из гипотезы $\neg\neg P$.

4. Построить вывод формулы P из гипотезы $\neg P \to P$.

$\neg P \to P$	(гипотеза)
$(\neg P \to P) \to ((\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P)$	(схема 7)
$(\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P$	(MP)
$\neg P \to \neg P$	(Упр. 1)
$\neg\neg P$	(MP)
P	(Упр. 3)

Полезные св-ва отношения выводимости:

- Монотонность: $(\Gamma \vdash A) \Rightarrow (\Gamma, B \vdash A)$.
- Теорема о дедукции: $(\Gamma, A \vdash B) \Rightarrow (\Gamma \vdash A \to B)$.
- Правило сечения (использование леммы): $(\Gamma_1 \vdash A), (\Gamma_2, A \vdash B) \Rightarrow (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash B)$.

В качестве правой посылки правила сечения часто используют:

- $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ (принцип силлогизма).
- $A \to B \vdash \neg B \to \neg A, \quad \neg A \to \neg B \vdash B \to A$ (принципы контрапозиции).
- $A, \neg A \vdash B$ (принцип приведения к абсурду).

5. Установить, что $\vdash P \to \neg\neg P$. (Применить теорему о дедукции к выводу $P \vdash \neg\neg P$.)

P	(гипотеза)
$P \to (\neg P \to P)$	(схема 1)
$\neg P \to P$	(MP)
$\neg P \to \neg P$	(Упр. 1)
$(\neg P \to P) \to ((\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P)$	(схема 7)
$(\neg P \to \neg P) \to \neg\neg P$	(MP)
$\neg\neg P$	(MP)

Тем самым, $P \vdash \neg\neg P$, откуда следует, что $\vdash P \to \neg\neg P$.

6. Установить справедливость указанных выше принципов.

7. Установить, что $\vdash P \vee \neg P$ (Закон исключенного третьего).

   Установим выводимость леммы $\neg\neg(P \vee \neg P)$, а затем снимем двойное отрицание с помощью Упр. 3. Имеем аксиомы:

$$\vdash P \to (P \vee \neg P)$$
$$\vdash \neg P \to (P \vee \neg P)$$

   Отсюда по принципу контрапозиции:

$$\begin{array}{lcl} \vdash \neg(P \vee \neg P) & \to & \neg P \\ \vdash \neg(P \vee \neg P) & \to & \neg\neg P \end{array}$$

   Запишем эти два вывода и аксиому 7 для $A = \neg(P \vee \neg P)$, $B = \neg P$, после чего дважды применим (MP). Получится вывод леммы.

Домашнее задание

8. Постройте выводы:
   1) $P, Q \vdash P \wedge Q$ 4) $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$
   2) $P \vdash P \vee Q$ 5) $\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$
   3) $\neg P \vdash P \to Q$ 6) $P, \neg Q \vdash \neg(P \to Q)$

9. Установить, что $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$.
   Сначала докажите, что $\vdash P \vee \neg P \to (((P \to Q) \to P) \to P)$.

10. Докажите, что если $\vdash A$, где A — формула, содержащая переменные $p_1, \ldots, p_n$ и только их, то существует вывод для A, в котором все формулы содержат лишь переменные $p_1, \ldots, p_n$ (не обязательно все).

11. *Множество формул Γ называется непротиворечивым, если нет такой формулы A, для которой $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$ одновременно. Максимальное по включению непротиворечивое множество формул называется максимальным непротиворечивым.*

    Пусть $f\colon \mathrm{PVar} \to \{0,1\}$ — любая оценка пропозициональных переменных. Докажите, что множество формул $\Gamma_f := \{A | f(A) = 1\}$ является максимальным непротиворечивым.

12. *Назовем множество формул Γ полным, если для любой формулы A из гипотез Γ выводима ровно одна из формул A, $\neg A$.*

    Докажите, что Γ полно тогда и только тогда, когда множество всех формул, выводимых из Γ, является максимальным непротиворечивым.

13. В данной задаче мы будем рассматривать лишь формулы от пропозициональных переменных p, q и r. Проверить заданные множества на непротиворечивость и полноту. Для непротиворечивых множеств построить полные расширения.

1) $\{p \to q,\ q \to p\}$	4) $\{p \vee q \to r,\ \neg r,\ p \vee q\}$
2) $\emptyset$	5) $\{p \wedge q \to q \vee r,\ r,\ \neg(p \vee q)\}$
3) $\{p \wedge q \wedge r\}$	6) $\{\neg(p \to \neg q),\ \neg p\}$

    Набросок решения для $\Gamma = \{p \to q,\ q \to p\}$:

    - Непротиворечивость следует из выполнимости. (Почему?)

    - $\Gamma \nvdash p$ и $\Gamma \nvdash \neg p$. (Почему?)

    - Пусть $\Delta = \{p \to q,\ q \to p,\ p,\ r\}$. Этот набор формул выполним на единственной оценке пропозициональных переменных $f(p) = f(q) = f(r) = 1$. Из него логически следуют ($\models$) те и только те формулы A, для которых $f(A) = 1$. Вспоминаем, что ($\models$) совпадает с ($\vdash$), и применяем задачи 11,12.