Московский государственный университет
Механико-математический факультет

“Введение в математическую логику”
2-й курс, 3-й семестр
Программа

Введение

Предмет математической логики. Вопросы оснований математики. Парадоксы теории множеств, семантические парадоксы. Аксиоматический метод Гильберта. Примеры языков и аксиоматических теорий: арифметика, элементарная геометрия.

Аксиоматическая теория множеств

Язык теории множеств. Аксиомы теории множеств Цермело. Упорядоченные пары, декартово произведение, бинарные отношения между множествами, отношение эквивалентности, фактормножество, функции.

Натуральные числа. Индуктивные множества, аксиома бесконечности. Формальное определение множества натуральных чисел. Принципы индукции, порядковой индукции, наименьшего числа. Принцип Дирихле. Рекурсивные определения, определение арифметических операций сложения и умножения.

Построение множеств целых, рациональных, вещественных чисел в теории множеств.

Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств. Сумма, произведение вполне упорядоченных множеств.

Аксиома выбора. Лемма Цорна. Теорема Цермело (всякое множество вполне упорядочиваемо). Эквивалентность этих трех утверждений.

Логика высказываний

Высказывания и логические связки. Формулы логики высказываний, понятие подформулы. Истинностные таблицы для логических связок и формул.

Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы. Алгоритм распознавания выполнимости. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью; важнейшие равносильности.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.

Логика предикатов

Предикаты. Переменные и их области изменения. Кванторы. Языки первого порядка: термы, формулы, подформулы. Примеры языков первого порядка. Свободные и связанные вхождения переменных. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.

Интерпретации (алгебраические системы, модели) для данного языка первого порядка. Истинность замкнутой формулы в данной интерпретации. Предикаты, выразимые в данной интерпретации. Понятие изоморфизма интерпретаций, сохранение значения формулы при изоморфизме. Доказательство невыразимости с помощью изоморфизма интерпретаций.

Общезначимые и выполнимые формулы языка первого порядка, их взаимосвязь. Равносильные формулы языка первого порядка. Переименование связанных переменных. Операции подстановки и замены подформулы на равносильную. Приведение формулы к предварённой нормальной форме.

Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Примеры теорий: теория частичных порядков, теория групп, теория полей, формальная арифметика, элементарная геометрия плоскости (аксиомы Тарского). Модель теории первого порядка. Семантическое следование.

Понятие совместной теории. Элементарная теория данной модели. Элементарная эквивалентность моделей. Понятие полной теории.

Исчисление предикатов

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость из множества замкнутых гипотез. Теорема о дедукции для исчисления предикатов. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности для логики предикатов.

Нестандартные модели арифметики, их существование. Описание отношения порядка для счётных нестандртных моделей арифметики.

Теорема Лёвенгейма–Сколема. Теорема Мальцева о повышении мощности.

Теория алгоритмов

Основные понятия теории алгоритмов. Функция, вычисляемая данным алгоритмом; область определения вычислимой функции. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча–Тьюринга.

Разрешимые множества. Нумерация пар натуральных чисел. Нумерация словарного пространства. Эквивалентные определения перечислимого множества. Свойства объединения, пересечения и дополнения разрешимых и перечислимых множеств. Теорема Поста. Перечислимость области определения и области значений вычислимой функции. Теорема о графике вычислимой функции.

Кодирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга. Универсальные функции. Пример вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения. Существование неразрешимого перечислимого множества. Алгоритмическая неразрешимость проблемы самоприменимости и проблемы остановки машин Тьюринга. Существование неотделимой пары перечислимых множеств. Теорема Райса.

Неразрешимость формальной арифметики, теоремы Гёделя о неполноте

Понятие разрешимой теории. Эффективно аксиоматизируемые теории. Теорема о разрешимости полной эффективно аксиоматизируемой теории.

Формальная арифметика Пеано, её стандартная модель. Σ_1-определимость в стандартной модели арифметики. Эквивалентность понятий перечислимого и Σ_1-определимого множества. Неперечислимость множества арифметических истин. Проблема распознавания истинности замкнутых арифметических формул, её алгоритмическая неразрешимость. Теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики (вторая теорема Гёделя о неполноте без доказательства).

Рекомендуемая литература

[1] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

[2] *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002. — 128 с.

[3] *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика. — М.: УРСС, 2004. — 240 с.

[4] *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.

[5] *Клини С. К.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.

[6] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — М.: МЦНМ, 2000. — 288 с.

[7] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — М.: МЦНМ, 1999. — 176 с.