

# Московский государственный университет

## Механико-математический факультет

2-й курс, осенний семестр  
Вопросы к экзамену

1. Язык теории множеств. Равенство множеств. Аксиомы равенства, пары, объединения, степени, выделения. Упорядоченные пары, декартово произведение, бинарные отношения между множествами, отношение эквивалентности, фактормножество, функции.
2. Натуральные числа. Индуктивные множества, аксиома бесконечности. Формальное определение множества натуральных чисел. Принципы индукции, порядковой индукции, наименьшего числа, их вывод из определения множества натуральных чисел.
3. Рекурсивные определения, определение арифметических операций сложения и умножения.
4. Построение множеств целых, рациональных, вещественных чисел в теории множеств.
5. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств. Сумма, произведение вполне упорядоченных множеств.
6. Аксиома выбора. Лемма Цорна. Теорема Цермело (всякое множество вполне упорядочиваемо).
7. Вывод леммы Цорна из аксиомы выбора.
8. Вывод теоремы Цермело из леммы Цорна. Вывод аксиомы выбора из теоремы Цермело.
9. Формулы логики высказываний, понятие подформулы. Истинностное значение формулы при данной оценке пропозициональных переменных. Таблица истинности формулы. Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы и их взаимосвязь. Алгоритм распознавания выполнимости.
10. Связь между формулами логики высказываний от  $n$  переменных и булевыми функциями. Теорема о функциональной полноте.
11. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью. Важнейшие равносильности. Свойство замены подформулы на равносильную.

12. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме. Единственность совершенной дизъюнктивной нормальной формы.
13. Понятие сигнатуры и модели (алгебраической системы) данной сигнатуры. Примеры моделей: стандартная модель арифметики; кольцо целых чисел; кольца многочленов и матриц порядка  $n$  над данным полем; евклидова плоскость в сигнатуре элементарной геометрии Тарского  $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ ; модель Пуанкаре геометрии Лобачевского.
14. Язык логики предикатов первого порядка данной сигнатуры. Свободные и связанные переменные, термы, формулы. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.
15. Семантика логики предикатов первого порядка. Расширение сигнатуры данной модели константами. Значение замкнутого терма расширенной сигнатуры в данной модели. Истинностное значение замкнутой формулы расширенной сигнатуры в данной модели.
16. Предикаты и функции, выразимые в данной модели. Выразимость предиката параллельности прямых  $ab \parallel cd$  в языке элементарной геометрии и формулировка аксиомы о параллельных.
17. Гомоморфизмы и изоморфизмы моделей. Теорема о сохранении истинностного значения формулы при изоморфизме. Автоморфизмы моделей, метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов. Описание автоморфизмов моделей  $(\mathbb{Z}; \leq)$ ,  $(\mathbb{R}^2; =, B)$  и  $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$  и примеры невыразимых предикатов в этих моделях.
18. Выполнимые формулы и множества формул языка первого порядка. Общезначимые и тождественно ложные формулы, их связь с выполнимыми формулами; примеры. Семантическое следование в логике первого порядка, его связь с понятиями выполнимости и общезначимости.
19. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Приведение формулы языка первого порядка к предварённой форме.
20. Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Модель данной теории. Понятие выполнимой теории. Примеры теорий: теория строгих частичных порядков, теория отношения эквивалентности, теория простых графов.

21. Теории первого порядка с равенством. Нормальные модели. Теорема о существовании нормальной модели у выполнимой теории с равенством. Примеры теорий с равенством: теория групп, формальная арифметика.
22. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость в теории, простейшие свойства выводимости. Доказуемые, опровержимые, независимые формулы для данной теории.
23. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
24. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.
25. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства), её три эквивалентные формулировки (с доказательством эквивалентности). Теорема Гёделя–Мальцева о компактности для логики предикатов.
26. Нестандартные модели арифметики, их существование. Понятие галактики. Описание отношения порядка на элементах данной галактики. Плотность порядка на множестве галактик.
27. Элементарная теория данной модели. Подмодель, элементарная подмодель данной модели. Теорема Лёвенгейма–Сколема (для счётной сигнатуры). Существование счётных моделей теории множеств ZFC, элементарных теорий полей  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$  и элементарной геометрии.
28. Бесконечная модель счётной сигнатуры имеет элементарное расширение любой большей мощности.
29. Основные понятия теории алгоритмов. Пошаговый характер выполнения алгоритма. Частичная функция, вычисляемая данным алгоритмом; область определения и область значений вычислимой функции.
30. Машина Тьюринга. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча–Тьюринга.
31. Разрешимые множества. Свойства объединения, пересечения, дополнения разрешимых множеств.
32. Перечислимые множества. Теорема об эквивалентных определениях перечислимого множества.
33. Свойства пересечения и объединения перечислимых множеств. Теорема о графике вычислимой функции. Теорема Чёрча–Поста (критерий разрешимости).

34. Кодирование машин Тьюринга. Построение универсальной машины Тьюринга.
35. Универсальные функции. Построение универсальной вычислимой функции для класса всех одноместных вычислимых функций  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .
36. Пример вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения. Пример неразрешимого перечислимого множества. Алгоритмическая неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга.
37. Главные универсальные функции. Главность вычислимой универсальной функции, построенной по нумерации машин Тьюринга.
38. Задача распознавания свойств вычислимых функций по их программам. Теорема Райса–Успенского.