Занятие 5

Язык пропозициональной модальной логики получается из языка ЛВ добавлением унарной связки $\Box$ (формула $\Box F$ читается "необходимо F"), а также сокращения $\Diamond = \neg\Box\neg$ ("возможно").

Модель Крипке для модальной логики состоит из *шкалы* (W, R) и *оценки переменных* $\alpha : Var \to \mathcal{P}(W)$. Здесь

- $W \neq \emptyset$ — множество "миров";
- оценка сопоставляет каждой переменной p множество $\alpha(p) \subseteq W$ тех миров, в которых p считается истинной;
- $R \subseteq W \times W$ — произвольное бинарное отношение ("достижимости").

Подразумеваемый смысл отношения R таков. Жители мира $w \in W$ точно не знают, в каком мире они живут, и осознают неполноту своего знания. Они считают, что их мир — один из миров, принадлежащих некоторому известному им множеству возможных миров $R_w \subseteq W$.[1] Отношение R задает связь между настоящими и возможными мирами: $\langle w, x\rangle \in R \Leftrightarrow x \in R_w$. Формула $\Box F$ означает "F верно во всех возможных мирах". Это понимание закрепляется определением истинности формулы в мире (обозначение $w \models F$):

- $w \models p \Leftrightarrow w \in \alpha(p)$ для $p \in Var$.
- Для булевых комбинаций истинность в данном мире определяется по стандартным таблицам истинности.
- $w \models \Box F \Leftrightarrow \forall x \in R_w (x \models F)$.

Следствие: $w \models \Diamond F \Leftrightarrow \exists x \in R_w (x \models F)$.

1. Проверить выполнимость формул (т.е. существование модели Крипке $M = (W, R, \alpha)$ и мира $w \in W$, в котором формула истинна):

   (a) $p \wedge \neg\Box p$;

   (b) $\neg p \wedge \Box p$;

   (c) $p \wedge \neg\Box p \wedge \Diamond p$ (Достаточно ли двух миров?).

[1] На самом деле их мир может и не принадлежать R_w.

2. Построить модели Крипке, в которых истинны следующие формулы (во всех мирах): (a) $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$; (b) $\Box \bot$.

3. Формула общезначима, если она истинна во всех моделях Крипке. Общезначимы ли следующие формулы?

   (a) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;

   (b) $\Diamond(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;

4. Истинность в шкале (W, R) (т.е. при всех оценках пропозициональных переменных, обозначение $(W, R) \models F$). Доказать:

   (a) Корректность правила подстановки:
   если $(W, R) \models A$, то $(W, R) \models A[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n]$.

   (b) $(W, R) \models \Box p \to p \;\Leftrightarrow\; \forall w_{\in W} wRw$ (т.е. шкала рефлексивна).

   (c) $(W, R) \models \Box p \to \Box\Box p \;\Leftrightarrow\; \forall u, v, w(uRv \wedge vRw \Rightarrow uRw)$ (т.е. шкала транзитивна).

Аксиомы модальной логики K:

- все тавтологии логики высказываний, в которых подставлены формулы модального языка.

- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

Правила вывода модальной логики K:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\,(MP) \qquad \frac{A}{\Box A}\,(Nec)$$

Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получена из предыдущих по одному из правил вывода. Вывод формулы F — это вывод, заканчивающийся формулой F. Обозначение $\vdash F$ — "формула F выводима".

Теорема. $\vdash F \Leftrightarrow F$ общезначима (т.е. истинна во всех моделях Крипке).

5. Вывести в логике **K**: $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$.

$$\begin{array}{ll}
A \wedge B \to A & \text{тавт.} \\
\Box(A \wedge B \to A) & \text{Nec.} \\
\Box(A \wedge B \to A) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box A) & \text{акс. } \mathbf{K} \\
\Box(A \wedge B) \to \Box A & \text{MP} \\
\ldots & \\
\Box(A \wedge B) \to \Box B & \text{аналогично} \\
(\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to (& \\
\quad (\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to (& \\
\quad\quad \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B) & \\
)) & \text{тавт.} \\
\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B) & \text{MP два раза}
\end{array}$$

Домашнее задание

6. Общезначимы ли следующие формулы?

   (a) $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$;

   (b) $\Box(A \vee B) \leftrightarrow (\Box A \vee \Box B)$;

   (c) $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$;

7. Истинность в шкале. Доказать:

   (a) $(W, R) \models p \to \Box\Diamond p \;\Leftrightarrow\; \forall u, v(uRv \Rightarrow vRu)$ (т.е. шкала симметрична).

   (b) $(W, R) \models \Box p \to \Diamond p \;\Leftrightarrow\; \forall u \exists v(uRv)$ (т.е. шкала сериальна).

8. Доказать допустимость правила подстановки для логики **K**:
   если $\vdash A$, то $\vdash A[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n]$.

9. Вывести в логике **K**:

   (a) $\Box A \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$.

   (b) $\Box A \wedge \Box B \to \Box(A \wedge B)$.

   (c) $\Box A \to \Box(A \vee B)$.