Занятие 4

Языки I-го порядка с равенством — в сигнатуре σ есть символ "$=$" и он интерпретируется именно равенством (такие интерпретации называются *нормальными*).

Теория T (некоторое множество замкнутых формул, аксиомы теории) задает *класс моделей* — те (нормальные) интерпретации, в которых все аксиомы истинны. *Теоремы* теории — те замкнутые формулы A, которые истинны во всех моделях аксиом (обозначение $T \models A$).

Основные вопросы:
- Как устроен класс моделей теории?
- Какие классы можно аксиоматизировать?
- Как получать теоремы? (про это не сегодня)

1. $\sigma = \{=\}$. Аксиоматизировать класс всех трехэлементных моделей.

Теория Γ_Q — плотные линейные порядки без первого и последнего элемента ($\sigma = \{<, =\}$):

$$\begin{array}{l}
\forall u(\neg(u < u)) \\
\forall u, v, w(u < v \wedge v < w \to u < w) \\
\forall u, v(u < v \vee u = v \vee v < u) \\
\forall u \exists v(u < v) \\
\forall u \exists v(v < u) \\
\forall u, v(u < v \to \exists w(u < w \wedge w < v))
\end{array}$$

2. Доказать, что все счетные модели Γ_Q изоморфны. (Напр., $(\mathbf{Q}, <)$ изоморфно $(\mathbf{Q} \cap (0, 1), <)$, а также порядку на двоично-рациональных числах.) В то же время, $(\mathbf{R}, <) \not\cong (\mathbf{Q}, <)$.

Более слабое отношение "похожести" моделей: две структуры I_1, I_2 (интерпретации одного и того же языка) называются *элементарно эквивалентными*, если $I_1 \models A \Leftrightarrow I_2 \models A$ для всех замкнутых формул A. Оказывается, что $(\mathbf{R}, <)$ и $(\mathbf{Q}, <)$ элементарно эквивалентны (будем доказывать), т.е. в языке нет утверждения, их различающего.

3. Пусть φ — изоморфизм двух структур I_1, I_2. Тогда

$$I_1 \models A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow I_2 \models A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$$

для всех формул языка (индукция по построению формулы A). Как следствие (для замкнутых формул), I_1 элементарно эквивалентна I_2.

4. Доказать неизоморфность $(\mathbf{Q}, <)$ и $(\mathbf{Z}, <)$.

Подструктура (подмодель языка) I_1 структуры I — это ограничение отношений структуры I на некоторое подмножество M_1 носителя M структуры I. Подструктура называется элементарной, если для всех формул языка выполнено

$$I_1 \models A(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow I \models A(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad x_1, \ldots, x_n \in M_1.$$

(В частности, I_1 оказывается элементарно эквивалентной I.)

5. Доказать, что подструктура $(\{1, 2, \ldots\}, <)$ элементарно эквивалентна структуре $(\mathbf{N}, <)$, но не является ее элементарной подструктурой.

Теорема Лёвенгейма-Сколема (на лекции). *Каждая бесконечная структура (не более чем счетной сигнатуры) имеет счетную элементарную подструктуру.*

6. Доказать, что $(\mathbf{Q}, <)$ и $(\mathbf{R}, <)$ элементарно эквивалентны. (Счетная элементарная подструктура структуры $(\mathbf{R}, <)$ будет изоморфна $(\mathbf{Q}, <)$).

7. У теории Γ_Q все модели элементарно эквивалентны.

Теория T называется *полной*, если для каждой замкнутой формулы A, она или ее отрицание — теорема ($T \models A$ или $T \models \neg A$).

8. Доказать, что если все модели теории элементарно эквивалентны, то теория полна. Верно ли обратное?

9. Доказать, что теория Γ_Q полна. Будут ли полными ее ослабления, полученные удалением одной из трех последних аксиом?

Теорема компактности (точнее «локальный принцип Мальцева», на лекции). *Теория (мн-во ее аксиом)* Γ *имеет модель тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество* $\Delta \subset \Gamma$ *имеет модель.*

10. $\sigma = \{=\}$. Аксиоматизировать класс всех бесконечных структур можно, а всех конечных — нельзя.

11. Выберем подходящую сигнатуру σ для записи аксиом группы. Доказать, что не существует замкнутой формулы, которая истинна во всех конечных группах и ложна во всех бесконечных.

Домашнее задание

12. $\sigma = \{=\}$. Аксиоматизировать класс всех моделей, содержащих а) не более 3 элементов, б) не менее 3 элементов, в) ровно 3 или ровно 5 элементов.

13. Доказать попарную неизоморфность следующих структур: $(\mathbf{N}, <)$, $(\mathbf{Z}, <)$, $(\mathbf{Q}, <)$, $(\mathbf{N} + \mathbf{Z}, <)$. Сумма $(X + Y, <)$ линейных порядков определяется так:

$$\overbrace{\rule{8em}{3pt}}^{(X,<)} < \overbrace{\rule{8em}{3pt}}^{(Y,<)}$$

14. В цепочке подструктур $(\mathbf{N}, <) \subset (\mathbf{Z}, <) \subset (\mathbf{Q}, <)$ выяснить, какие из них будут элементарными подструктурами.

15. Бывают ли у полной теории неизоморфные модели?

16. Фиксируем некоторую структуру I. В качестве аксиом возьмем все замкнутые формулы, истинные в I. Доказать, что получившаяся теория $Th(I)$ полна.

17. Теория T получена из Γ_Q заменой аксиомы об отсутствии наименьшего элемента на утверждение о его наличии: $\exists x \forall y (x < y \vee x = y)$. Доказать изоморфность всех счетных моделей теории T и, как следствие, полноту теории T.

18. Справедливы ли аналоги утверждений задачи 11 для коммутативных групп, колец, полей?

19. Сигнатура языка арифметики состоит из двух трехместных предикатных символов “$x + y = z$”, “$x \cdot y = z$” (и равенства). В качестве аксиом теории T выберем все замкнутые формулы, истинные в стандартно интерпретации $(\mathbf{N}, +, \cdot)$. Доказать, что T имеет модель, которая не изоморфна стандартной. (Контрольный вопрос: почему она должна быть элементарно эквивалентной стандартной модели?)